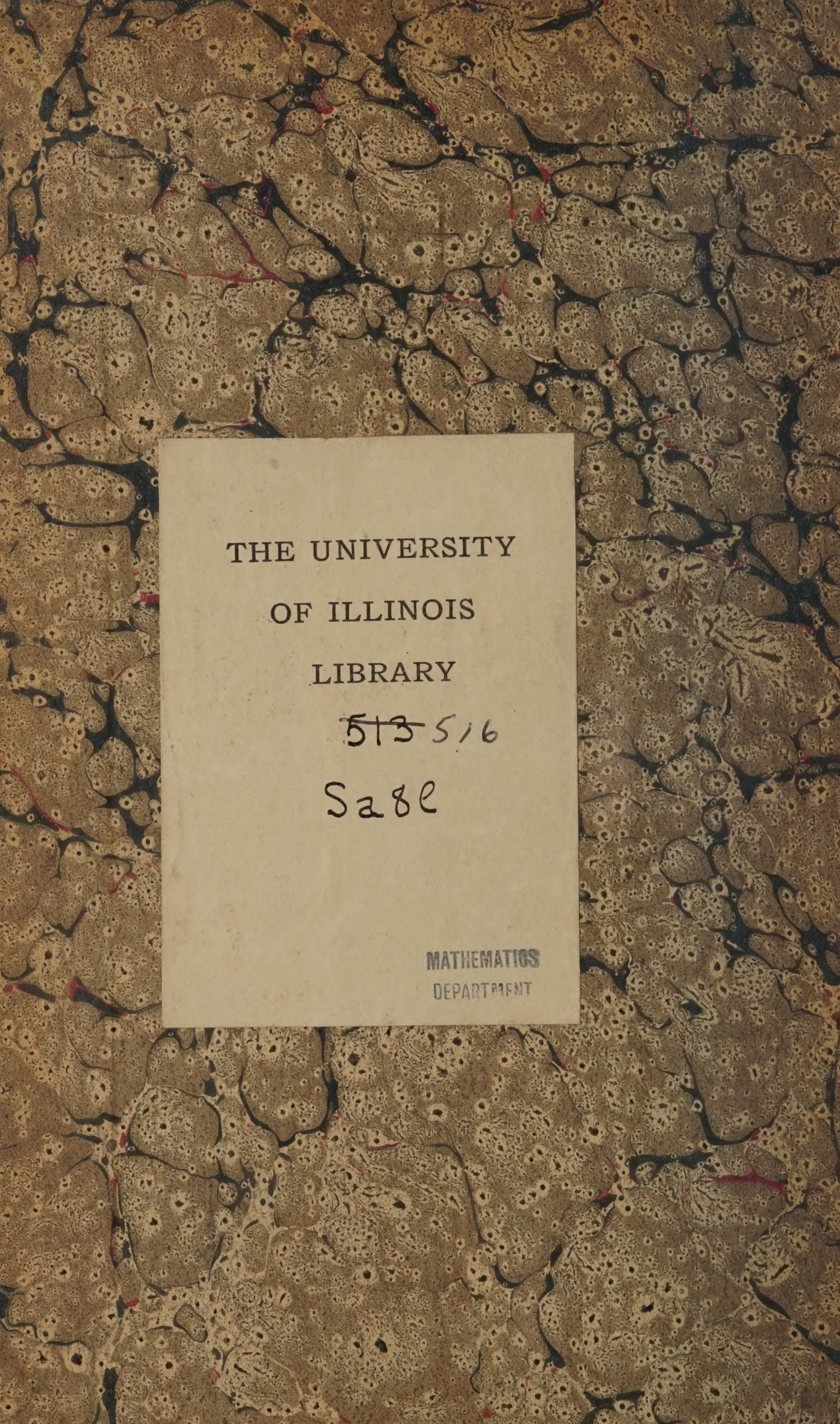






LES

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

EN

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
18937 Quai des Grands-Augustins, 55.

LES

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

EN

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

PAR

M. P. SAUVAGE,
Professeur de Mathématiques (Saint-Cyr) au lycée de Montpellier.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

PRÉFACE.

Le but principal de cette étude est de ramener à un petit nombre de méthodes générales les procédés appliqués le plus souvent dans la recherche des lieux géométriques ne dépendant que de la Géométrie élémentaire. Les élèves y trouveront, non pas un moyen assuré d'arriver au résultat dans tous les cas possibles, mais un guide pour la voie dans laquelle il convient de chercher.

Bien qu'elle s'adresse surtout aux élèves qui connaissent déjà tout le programme de Mathématiques élémentaires relatif à la Géométrie, que dans les préliminaires on s'appuie sur la notion des coordonnées rectangulaires employées aujourd'hui dans tous les cours de Mathématiques élémentaires pour la représentation des fonctions, que pour certains exemples on admette le théorème de Dandelin relatif aux sections planes du cône de révolution, la plus grande partie de ce Travail est à la portée des débutants, de ceux qui étudient pour la première fois la Géométrie.

Le premier Chapitre contient quelques considérations préliminaires très succinctes sur ce qu'on doit entendre par condition dans la détermination d'une figure géométrique. Dans cette partie seule il est question de coordonnées. On en

déduit la notion de lieu géométrique, et celle d'enveloppe dans le plan et dans l'espace.

Le deuxième Chapitre a pour objet l'examen des méthodes générales, réduites à cinq, pour la recherche des lieux géométriques plans, avec un très petit nombre d'exemples à l'appui, et de l'application de ces méthodes à l'espace.

Dans le troisième Chapitre, en vue surtout de la méthode des substitutions successives, on passe en revue les lieux géométriques très nombreux que l'on rencontre dans le cours, et ceux qui s'en déduisent immédiatement soit par analogie en passant du plan à l'espace, soit par l'application des méthodes précédentes.

Le quatrième Chapitre est réservé au développement de quelques exemples et à l'indication de certains autres, comme application de ces méthodes.

Enfin un dernier Chapitre porte sur l'application des lieux géométriques aux problèmes graphiques.

Les méthodes de recherche étant seules considérées dans ce Travail, toutes les discussions ont été systématiquement écartées; pour plusieurs exemples, on s'est borné à l'indication des méthodes et des résultats.

LES

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

1. **Détermination d'un point dans un plan.** — En Géométrie plane, on peut toujours définir la position d'un point par l'intersection de deux lignes.

Par exemple, étant données deux droites fixes qui se coupent, Ox, Oy, si par le point M considéré on leur mène des parallèles, il suffira de connaître les distances y et x de ces parallèles aux droites Ox, Oy pour que le point soit déterminé par leur intersection. Toutefois, pour qu'il n'y ait pas ambiguïté, il faut attribuer un signe à chaque distance, suivant que la parallèle est d'un côté ou de l'autre de la droite fixe. Dans le cas où les droites Ox, Oy sont rectangulaires, nous appellerons ces distances, affectées de signes convenables, les coordonnées de M par rapport à ces droites.

On pourrait de même définir un point par ses distances à deux points fixes, ce qui revient à le déterminer par l'intersection de deux circonférences ayant pour centres ces points fixes. Alors il y a ambiguïté, les circonférences se coupant en deux points.

D'une manière générale, on pourrait déterminer ce point par l'intersection de deux lignes arbitraires passant par ce point; les plus simples à employer sont des droites passant chacune par un point fixe situé à distance finie ou infinie et des circonférences de centres fixes.

2. Conditions pour la détermination d'un point dans un plan. — Quel que soit le système employé, si les lignes qui, par leur intersection, déterminent un point du plan, sont susceptibles d'une définition géométrique rigoureuse, les distances x_0, y_0 d'un point quelconque de chaque ligne à deux droites rectangulaires fixes tracées dans le plan sont liées l'une à l'autre de telle façon que, l'une étant donnée, l'autre puisse être calculée; il existe donc entre les coordonnées x et y, variant avec la position du point sur la ligne, une relation $f(x, y) = 0$ à laquelle satisfont les coordonnées de tous les points de la ligne et de ceux-là seulement. De même les coordonnées de tout point de la seconde ligne satisfont à une relation caractéristique $\varphi(x, y) = 0$; en sorte que les coordonnées x_0, y_0 du point M situé à la fois sur les deux lignes vérifient les deux équations, ce qui s'exprime par les deux relations

$$f(x_0, y_0) = 0,$$
$$\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

On donne le nom de *condition* simple, pour la détermination d'un point, à toute corrélation avec des repères fixes pouvant s'exprimer par une équation telle que $f(x_0, y_0) = 0$ entre les coordonnées de ce point. Il faut donc deux conditions pour déterminer un point. Toutefois, en se plaçant à ce point de vue général, deux conditions peuvent conduire à plusieurs solutions; par exemple, il y aura deux solutions si les lignes définies par les équations $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ sont une droite et une circonférence, ou deux circonférences.

3. Lieux géométriques plans. — Si un point d'un plan n'est assujetti qu'à une seule condition, il peut occuper une infinité de positions se succédant en général d'une manière continue; et leur ensemble constitue le *lieu géométrique* des points satisfaisant à cette condition, à l'exclusion de tous les points qui n'y satisfont pas.

L'équation $f(x, y) = 0$ qui exprime cette condition par une relation entre les coordonnées de tous les points qui satisfont à la condition est ce qu'on appelle l'*équation du lieu*.

4. Détermination d'un point dans l'espace. — Il faut trois conditions pour déterminer un point dans l'espace. Par exemple, on pourra le définir en considérant trois plans fixes rectangulaires deux à deux, et donnant les distances $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ de ces plans à trois plans qui leur sont parallèles, menés par ce point, ces distances étant susceptibles de signes d'après le sens suivant lequel elles sont portées à partir des plans fixes.

On pourrait encore le déterminer par l'intersection de trois surfaces quelconques passant par ce point. Prise ainsi dans toute sa généralité, cette détermination peut donner plusieurs solutions.

Entre les coordonnées x, y, z de tout point d'une surface déterminatrice, on conçoit qu'il existe une relation caractéristique $f(x, y, z) = 0$. Dire que le point M, de coordonnées x_0, y_0, z_0, est sur cette surface revient donc à dire que ses coordonnées satisfont à cette équation, ou que l'on a la *condition* $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Puisque trois surfaces sont nécessaires pour déterminer un point par leur intersection, nous dirons qu'*il faut trois conditions pour déterminer un point dans l'espace*.

5. Lieux géométriques de points dans l'espace. — Si un

point, dans l'espace, n'est assujetti qu'à deux conditions telles que

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

il peut occuper une infinité de positions, toutes situées sur les deux surfaces que définissent les équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z) = 0;$$

l'ensemble de ces positions constitue un lieu géométrique, qui est une ligne, intersection des deux surfaces.

S'il n'est assujetti qu'à une seule condition,

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

l'ensemble de toutes les positions occupées constitue encore un lieu, qui est la surface représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

6. Lieux géométriques de lignes dans l'espace. — Considérons de même une ligne dans l'espace. On conçoit qu'il faille un certain nombre de conditions pour la déterminer. Soit n ce nombre. Si l'on donne seulement $(n - 1)$ conditions, la ligne pourra prendre une infinité de positions, en variant ou non de forme, tout en satisfaisant à ces $(n - 1)$ conditions, et leur ensemble constitue un lieu, qui est généralement une surface.

7. Enveloppes de lignes dans un plan. — Cette dernière considération peut être appliquée à la Géométrie plane. Lorsqu'une ligne plane dont la détermination exige n conditions n'est assujettie qu'à $(n - 1)$ conditions, l'ensemble de ses positions ne recouvre pas, en général, tout le plan; on peut, le plus souvent, trouver une ligne tangente à toutes les positions de la ligne mobile, et qui sépare le plan en deux régions telles que l'une ne contient aucune position, aucun point de

la ligne mobile, tandis que l'autre région contient au contraire toutes ces positions, tout point de cette région pouvant appartenir à une position de la ligne mobile. On donne à cette ligne fixe le nom d'*enveloppe* de la ligne mobile.

Par exemple, l'enveloppe d'une droite qui se déplace en demeurant constamment à une distance fixe a d'un point O est une circonférence de centre O et de rayon a.

8. **Enveloppes de surfaces.** — Dans l'espace, il y aurait lieu également de considérer l'enveloppe d'une surface mobile, avec ou sans déformation, astreinte à une condition de moins qu'il n'en faudrait pour déterminer la surface : cette enveloppe est, en général, une surface tangente à toutes les positions de la surface mobile.

9. Cette considération des enveloppes n'est utilisable, en Géométrie élémentaire, que dans des cas restreints : par exemple, en Géométrie plane, quand la ligne mobile et l'enveloppe sont des droites et des circonférences; dans l'espace, quand la surface mobile et l'enveloppe sont des plans avec des sphères, cônes ou cylindres. L'étude des enveloppes est, en effet, généralement beaucoup plus compliquée que celle des lieux géométriques.

Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons uniquement de lieux géométriques de points.

CHAPITRE II.

MÉTHODES GÉNÉRALES POUR LA RECHERCHE DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES PLANS.

10. Il n'existe aucune méthode convenant à tous les cas, basée sur des considérations purement géométriques et conduisant sûrement à découvrir la nature d'un lieu géométrique plan, même lorsque ce lieu se compose des lignes étudiées dans le Cours de Géométrie élémentaire.

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, d'étudier certaines méthodes générales propres à faire découvrir les propriétés caractéristiques d'un lieu satisfaisant à des conditions données, et à servir de guide pour la démonstration de ces propriétés.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Construction par points. — Points remarquables.

11. On a recours à cette méthode quand on n'a aucune indication *a priori* sur la nature du lieu : on commence par en construire un certain nombre de points, en partant de la définition, lorsque cette construction n'est pas trop compliquée, et on les joint par un trait continu, qui indique la forme du lieu. On détermine, avant tout, les points remarquables par les considérations suivantes :

1° Si le lieu présente des *axes de symétrie,* on construit

les points du lieu appelés *sommets,* qui appartiennent à chacun de ces axes. S'il y a deux axes de symétrie rectangulaires, leur point de concours est un *centre* de symétrie. Il peut y avoir un centre sans axes de symétrie.

2° On construit aussi les *points limites,* s'il y en a. Soit, par exemple, le lieu des points qui divisent dans un rapport donné la droite AB joignant les extrémités de deux rayons parallèles et de même sens de deux circonférences situées dans un même plan. Les points limites sont situés sur les tangentes communes extérieures, s'il y en a, toutes les positions de la droite AB étant situées entre ces deux tangentes, qui sont leurs positions limites.

3° On cherche enfin si le lieu présente des points à l'infini, et dans quelles directions.

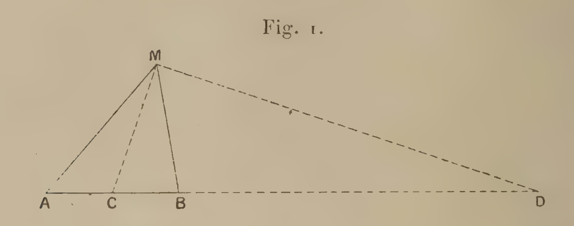
Cette construction par points (et souvent les points remarquables suffisent pour cela) pourra faire découvrir, ou simplement soupçonner des propriétés caractéristiques du lieu, propriétés qu'il faudra ensuite démontrer en partant de la définition; pour cela il sera souvent utile de relier, d'une manière simple, un point quelconque du lieu, que nous appellerons *point courant,* aux points remarquables.

12. Exemple tiré du Cours. — *Lieu des points tels que le rapport des distances de chacun à deux points fixes ait une valeur donnée* $\frac{m}{n}$.

La droite qui joint les deux points fixes A, B (*fig.* 1) est évidemment un axe de symétrie. Les points C, D du lieu situés sur cet axe sont les points harmoniques conjugués divisant AB dans le rapport $\frac{m}{n}$. Considérons maintenant le point courant du lieu M, et joignons-le aux points A et B et aux points C, D : on a par définition $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$. Ces égalités

expriment que MC et MD sont les bissectrices des angles en M intérieur et extérieur au triangle AMB; elles sont donc rectangulaires, et tout point du lieu appartient à la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

Fig. 1.



13. Remarque. — Même lorsque cette construction ne fait pas découvrir de propriété caractéristique, elle peut guider, par la forme même du lieu, en procédant par exclusion. Ainsi la forme indiquera immédiatement si le lieu ne peut pas être une droite ou un système de droites; la découverte de points à l'infini fera rejeter le cercle et l'ellipse; celle de points à l'infini dans deux directions distinctes écartera la parabole et la droite unique, mais le lieu pourra se composer de deux droites concourantes. Toutefois ce ne sont là que de simples indications, non des démonstrations, excepté dans le cas où l'on a la certitude *a priori* que le lieu ne dépasse pas le second degré, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être coupé par une droite en plus de deux points, ou encore qu'il se compose d'une ou deux droites ou d'une des courbes planes, cercle, ellipse, hyperbole, parabole, étudiées dans le Cours de Géométrie élémentaire. En outre, même dans ce cas, il pourrait arriver que le lieu se composât d'un ou de plusieurs segments de droites, d'arcs d'hyperbole ou de parabole, sans avoir de points à l'infini. On en rencontre des exemples en Géométrie descriptive, lorsqu'on cherche l'intersection de deux surfaces du second degré dont les axes sont dans un même plan : la projection de la courbe d'intersection sur un

plan parallèle aux deux axes se compose d'arcs d'ellipse, de parabole ou d'hyperbole. Autre exemple : le lieu décrit par le sommet de l'angle droit d'une équerre lorsque les extrémités de l'hypoténuse glissent sur deux droites rectangulaires est un segment de droite dont la longueur est double de l'hypoténuse. A ce point de vue la présence de points à l'infini pourra être probante, leur absence non.

DEUXIÈME MÉTHODE.

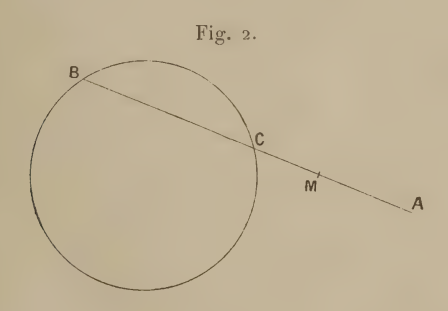
Substitutions successives.

14. Elle consiste à ramener le lieu demandé à un autre plus simple ou connu : c'est la plus employée; on en trouve de nombreux exemples dans le Cours. Rappelons le suivant, tiré de la théorie des figures inverses :

Trouver la figure inverse d'un cercle, par rapport à un centre d'inversion A *pris dans son plan.*

B étant un point quelconque de la circonférence donnée,

Fig. 2.



M le point correspondant du lieu (*fig.* 2), et μ la puissance d'inversion, on a par définition $AM.AB = \mu$.

Or AB coupe la circonférence en un second point C et, si

l'on désigne par a la distance du point A au centre O, puis par R le rayon, on a aussi $AC.AB = a^2 - R^2$.

Divisant membre à membre ces deux égalités

$$\frac{AM}{AC} = \frac{\mu}{a^2 - R^2} = \text{const.}$$

Le lieu de M est donc une figure homothétique à la circonférence donnée, le centre de similitude étant A_1 et le rapport de similitude $\frac{\mu}{a^2 - R^2}$. On sait que cette figure est une circonférence.

Pour l'application de cette méthode, il importe de connaître le plus grand nombre possible de lieux géométriques; nous rappellerons plus loin ceux qui sont étudiés dans le Cours, ou qui s'en déduisent facilement.

15. Cette application est grandement facilitée par la connaissance des méthodes générales de transformation des figures permettant de passer d'un lieu à un autre. Nous connaissons, à ce point de vue, l'homothétie, la théorie des polaires, l'inversion, ou transformation par rayons vecteurs réciproques, que l'on étudie dans la plupart des ouvrages de Géométrie élémentaire. En voici trois autres d'un emploi très fréquent : *translations parallèles, rotations, projections.*

TROISIÈME MÉTHODE.

Translation parallèle.

16. Toutes ses applications découlent de ce principe évident :

Si par tous les points d'une figure on mène des droites parallèles à une direction fixe, de même sens et de même

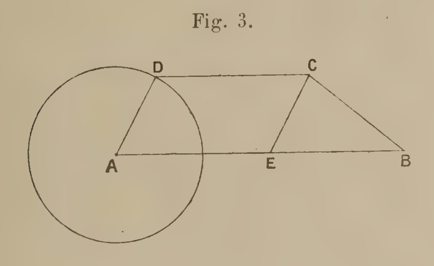
longueur, le lieu de leurs extrémités est une figure égale à la première.

Il n'est pas nécessaire que la figure soit plane, et, si elle l'est, les parallèles peuvent n'être pas dans son plan.

Exemple. — *Un trapèze* ABCD (*fig.* 3) *se déforme de manière qu'une des bases* AB *reste fixe, tandis que le côté* AD, *de grandeur constante, tourne autour de* A *et que la seconde base conserve une longueur constante : trouver le lieu décrit par le quatrième sommet* C.

Le point D décrit une circonférence de centre A; alors toutes les positions de la droite DC sont des parallèles à AB,

Fig. 3.



de même sens et ayant une même longueur, menées par les différents points de la circonférence; le lieu des positions de C est donc une circonférence égale à la première, ayant son centre en E, tel que AE = DC.

17. *Autre énoncé du principe fondamental.* — Si l'on joint tous les points d'une figure à un point fixe A, puis que, par un second point fixe E, on mène des parallèles aux droites AD ainsi obtenues, de même sens et de même longueur, le lieu de leurs extrémités C est une figure égale à la première.

Cet énoncé revient bien au premier, car la première hypothèse DC égale et parallèle à AB entraîne comme conclusion que EC est égale et parallèle à AD et réciproquement.

QUATRIÈME MÉTHODE.

Rotations.

18. On fait tourner certains éléments de la figure autour de points ou d'axes fixes pour les amener dans une position particulière par rapport aux autres éléments; puis, quand on a obtenu pour cette position particulière des résultats dépendant des éléments mobiles, on ramène ceux-ci, par une rotation inverse, à leur position primitive, avec les résultats obtenus.

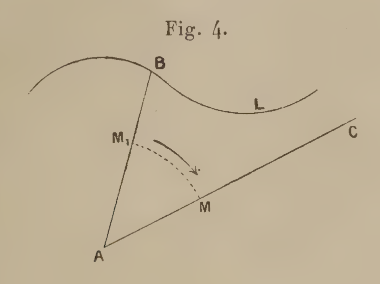
Cette méthode trouve souvent son application lorsque, dans la figure à étudier, il y a un angle constant tournant autour de son sommet fixe : on commence par ramener l'un des côtés de l'angle sur l'autre, sans changer sa longueur, et l'on cherche le lieu correspondant à cet angle nul.

19. **Exemple.** — *Par un point* A *pris dans le plan d'une ligne* L *on mène une droite mobile* AB (*fig.* 4), *rencontrant cette ligne en* B; *puis, dans le même plan, une autre droite* AC, *faisant avec la première un angle donné* α, *sur laquelle on prend un point* M *tel que* $\frac{AM}{BA} = \lambda$ *ou* $AM.AB = \mu$, λ *et* μ *étant des constantes données : trouver le lieu décrit par le point* M *lorsque* B *parcourt la ligne* L.

Faisons d'abord tourner la ligne AC autour de A, d'un angle α, de manière à l'amener sur AB; alors M vient en M_1, et lorsque B se déplace sur la ligne L, le lieu décrit par M_1 est

une ligne l_1 homothétique à L si c'est le rapport $\frac{AM}{AB}$ qui doit avoir une valeur constante donnée λ, ou une figure l_2 inverse de L si, au contraire, c'est le produit AM.AB qui doit con-

Fig. 4.



server une valeur constante donnée μ. Donc le lieu demandé n'est autre que la figure l_1 ou l_2 que l'on aurait fait tourner d'un angle α autour de A dans le sens de la flèche.

20. Conséquences. — On ramène immédiatement aux précédents les lieux suivants.

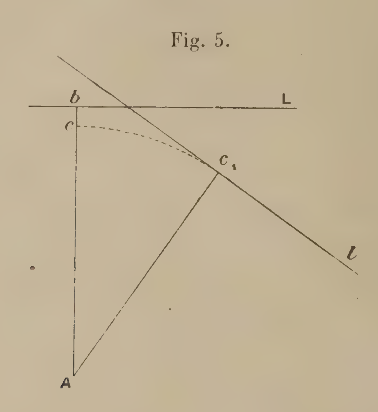
1° Pour le cas de $\frac{AM}{AB} = \lambda$: un triangle ABC tourne autour du sommet fixe A et se déforme, en restant semblable à lui-même, de manière que le sommet B décrive une ligne L située dans son plan; trouver le lieu décrit par le troisième sommet C.

L'angle BAC demeure constant, d'après l'hypothèse, ainsi que le rapport $\frac{AC}{AB}$; nous sommes donc ramenés au premier cas de l'exemple précédent.

Ce lieu se rencontre souvent dans les deux cas particuliers où L est une droite ou une circonférence. Les conclusions sont alors les suivantes : quand le point B décrit une droite, C décrit une autre droite l faisant avec la première un angle $\alpha = \widehat{BAC}$. On l'obtient aisément en prenant Ab

perpendiculaire à L, construisant sur cette perpendiculaire le point c tel que $\frac{Ac}{Ab} = \lambda$, puis faisant tourner Ac de l'angle α dans le sens convenable et menant par sa nouvelle position c_1 une perpendiculaire à Ac_1 (*fig.* 5). Quand le point B décrit une circonférence, C décrit aussi une circonférence. On en obtiendra le centre O et un point d en menant le diamètre de la

Fig. 5.



circonférence donnée passant par A, prenant sur cette droite les points O_1 et d_1 homologues au centre donné O et au point D où la droite AO perce la circonférence, puis faisant tourner ces deux points d'un angle $\alpha = \widehat{BAC}$ autour de A dans le sens convenable. On obtiendrait encore ces points O_1, d_1 en construisant sur AO et AD pris comme homologues à AB des triangles semblables au triangle mobile ABC, ce qui revient à considérer un point remarquable du lieu.

2° Pour le cas où $AM.AB = \mu$: un triangle tourne autour du sommet A fixe, et se déforme en conservant l'angle A invariable et une aire constante m^2 de manière que le sommet B décrive une ligne L située dans son plan; trouver le lieu décrit par le troisième sommet C.

L'aire a pour expression

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{AB}.\mathrm{AC}\sin \mathrm{A} = m^2,$$

d'où

$$\mathrm{AB}.\mathrm{AC} = \frac{2m^2}{\sin \mathrm{A}};$$

nous sommes ramenés au second cas du premier exemple.

CINQUIÈME MÉTHODE.

Projections.

21. Définitions. — Rappelons que la *projection conique,* ou *perspective,* d'un point A de l'espace sur un plan de projection P, appelé *plan du tableau,* par rapport à un *centre* ou *point de vue* O, est le point α où la droite OA rencontre le plan de projection.

La projection d'une figure F est la figure f formée par les perspectives de tous les points de la figure F.

Si le point O est situé à l'infini dans une certaine direction Δ, la projection devient cylindrique; elle est dite oblique ou orthogonale suivant que la direction Δ est oblique ou perpendiculaire au plan P.

La méthode des projections permet de déduire la connaissance d'un lieu plan de celle d'un autre lieu plan lorsque le premier peut être, dans des conditions convenables, la perspective de l'autre.

22. Exemple de perspective, sections coniques. — On sait que, si l'on coupe un cône de révolution par un plan, la section est une ellipse, une parabole ou une hyperbole; et que, inversement, on peut toujours placer l'une quelconque de ces courbes donnée sur un cône de révolution, lequel peut être d'angle quelconque pour le cas de l'ellipse et de la parabole,

tandis que dans le cas de l'hyperbole il faut et il suffit que l'angle au sommet du cône soit au moins égal à l'angle des asymptotes (théorème de Dandelin).

Cela revient à dire que, dans tous les cas, une conique peut être considérée comme la perspective d'un cercle, pourvu que le point de vue et le plan du tableau soient convenablement choisis : le point de vue doit être le sommet d'un cône de révolution contenant la conique, et le plan du cercle être perpendiculaire à l'axe de ce cône.

Cela posé, concevons que l'on ait à chercher dans le plan de la conique le lieu des points jouissant d'une certaine propriété. Si la propriété se conserve en perspective, en d'autres termes si c'est une *propriété projective,* nous chercherons quel est le lieu correspondant à la même propriété quand on substitue un cercle à la conique, substitution qui simplifiera en général la question ; la perspective du lieu ainsi obtenue sera le lieu demandé.

23. *Remarque I.* — En se plaçant dans le cas particulier où le sommet du cône est rejeté à l'infini, la projection devient orthogonale. Les conclusions s'appliquent, mais perdent de leur généralité, l'ellipse étant la seule conique qui puisse être placée sur un cylindre de révolution. On ne pourra donc appliquer cette méthode particulière qu'à l'ellipse. On pourrait encore étudier les questions relatives à l'ellipse en la considérant comme projection d'un cercle.

24. *Remarque II.* — La même méthode pourrait s'appliquer à une propriété qui ne serait pas projective, pourvu que l'on sût trouver la propriété correspondante dans la projection.

25. **Exemple de propriété projective : division harmonique.** — Soient quatre points A, B, C, D, formant une divi-

sion harmonique sur une droite Δ; la perspective de cette droite est elle-même une droite δ sur laquelle sont les projections a, b, c, d des quatre points A, B, C, D. Les projetantes OA, OB, OC, OD forment un faisceau harmonique, qui divise harmoniquement δ : donc la division harmonique est projective.

26. **Conséquences.** — 1° Le lieu du conjugué harmonique d'un point P pris dans le plan d'une conique, par rapport aux points où toute sécante issue de P rencontre la conique, est une droite qu'on appelle la *polaire* de P par rapport à la conique.

27. Cas particulier. — 2° Si P est à l'infini, son conjugué harmonique par rapport aux points A et B où une sécante issue de P rencontre la conique est le milieu de la corde AB; le théorème se transforme en celui-ci :

Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée dans une conique est une droite que l'on appelle diamètre conjugué à la direction donnée.

28. *Remarque III.* — Cette méthode ne s'applique pas seulement à la recherche des lieux géométriques; mais de chaque propriété graphique du cercle on peut déduire une propriété correspondante des coniques, pourvu que la propriété considérée dans le cercle soit projective. Par exemple, les propriétés des tangentes et des diamètres conjugués dans les coniques se déduiraient des propriétés des tangentes et des diamètres rectangulaires dans le cercle.

RECHERCHE DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE.

29. 1° La construction du lieu par points n'est possible, en général, que par les procédés de la Géométrie descriptive.

Elle est le plus souvent trop compliquée pour être avantageuse. Au contraire, la détermination des points remarquables, des plans, axes et centres de symétrie peut être d'une grande utilité. Quand il y a deux plans de symétrie rectangulaires, leur intersection est un axe de symétrie, et le point commun à trois plans de symétrie rectangulaires deux à deux est un centre de symétrie; mais il peut y avoir axe ou centre de symétrie en dehors de ces deux cas.

2° La méthode de substitutions successives est encore la plus féconde.

3° Les translations parallèles, sous les deux formes que comporte l'énoncé, sont parfois utiles, lorsque les figures considérées peuvent appartenir à un même cylindre.

4° Les rotations autour d'axes fixes sont indiquées pour les surfaces de révolution. On les emploie dans le Cours pour étudier certaines propriétés de la sphère.

5° Les projections peuvent encore rendre de grands services.

Notamment lorsqu'on doit considérer, dans la génération du lieu, deux droites fixes sur lesquelles s'appuie une droite mobile, il est avantageux de projeter toute la figure soit orthogonalement, soit obliquement, sur un plan parallèle aux deux droites fixes; nous en verrons des exemples.

6° Un grand nombre de lieux dans l'espace peuvent se déduire de lieux plans en coupant la figure par un plan convenablement choisi, auquel on appliquera ensuite une des méthodes de transformation précédentes : translation, rotation ou projection.

30. Nous appliquerons ces considérations à un certain nombre d'exemples, en choisissant de préférence des lieux qui peuvent trouver eux-mêmes leur application dans la pratique.

Auparavant nous passerons en revue les lieux géomé-

triques étudiés dans le Cours ou qui s'en déduisent immédiatement par les méthodes précédentes. Ils nous serviront de base pour la méthode des substitutions successives qui, tout en conduisant à elle seule au résultat dans un grand nombre de cas, intervient à chaque instant, comme auxiliaire, dans l'application des autres méthodes.

CHAPITRE III.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES CONNUS, OU ÉVIDENTS PAR L'APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES.

I. — LIEUX DÉDUITS DES DÉFINITIONS ET CONSÉQUENCES.

31. Le lieu des points situés à une distance donnée R d'un point fixe est une circonférence en Géométrie plane, une sphère dans l'espace.

Conséquences. — (*a*) Le lieu des centres des circonférences de rayon R passant par un point donné est une circonférence de rayon R en Géométrie plane, une sphère dans l'espace.

(*b*) Le lieu des centres des sphères de rayon R passant par un point donné est une sphère.

(*c*) Le lieu des points situés à une distance d d'une circonférence donnée de rayon R se compose, en Géométrie plane, de deux circonférences concentriques à la première, ayant pour rayons $R + d$ et $R - d$ (en supposant $R > d$). Dans l'espace, c'est un tore engendré par un cercle de rayon d dont le plan est perpendiculaire au plan du cercle et passe par le centre; l'axe du tore est perpendiculaire au plan du cercle fixe, et dans ce mouvement le centre du cercle mobile décrit la circonférence fixe. Du lieu dans l'espace on pourrait déduire le lieu en Géométrie plane, en considérant la section faite dans le tore par le plan du cercle donné, section qui se compose du cercle de gorge et du cercle d'équateur.

Remarque. — Ces deux énoncés supposent $d < R$. Dans le cas contraire, la circonférence extérieure de rayon $R + d$ convient toujours pour le lieu plan. Pour l'autre, son rayon est la valeur absolue $d - R$ de la différence entre le rayon et la distance d; mais elle ne répond plus directement à la définition de la distance d'un point à une circonférence : d ne représente plus la plus petite normale menée de chaque point de la circonférence qui a pour rayon $d - R$ à la circonférence donnée, mais au contraire la plus grande des deux normales menées de ce point.

Le lieu dans l'espace comporte une restriction analogue.

(d) Le lieu des points situés à une distance d d'une sphère de rayon R se compose de deux sphères concentriques à la première, ayant pour rayons $R + d$ et la valeur absolue de $(R - d)$. Pour cette dernière sphère, la conclusion comporte encore la même restriction.

(e) Le lieu des centres des cercles de rayon r tangents à une circonférence donnée, dans son plan, se compose de deux circonférences concentriques à celle-ci, ayant pour rayons la somme et la différence des deux rayons donnés.

Le lieu des centres des sphères de rayon r tangentes à une sphère donnée se compose de deux sphères concentriques à la première ayant pour rayons la somme et la différence des deux rayons donnés.

32. Le lieu des points tels que la somme des distances de chacun à deux points fixes ait une valeur donnée est en Géométrie plane une ellipse, dans l'espace un ellipsoïde engendré par la révolution de l'ellipse précédente autour de la droite qui joint les deux points, lesquels sont les foyers de l'ellipsoïde.

Conséquences. — (a) Le lieu des points de l'espace tels que la somme des distances de chacun à deux droites paral-

lèles fixes ait une valeur donnée est un cylindre elliptique ayant ses génératrices parallèles aux deux droites données, toute section droite ayant pour foyers les points où son plan coupe les deux droites fixes.

(*b*) Le lieu des points d'un plan tels que la somme des distances de chacun à deux droites parallèles fixes situées dans ce plan soit égale à une quantité donnée est un système de deux droites parallèles aux droites fixes, qui sont les génératrices du cylindre précédent situées dans le plan donné.

33. Le lieu des points tels que la différence des distances de chacun à deux points fixes ait une valeur donnée est en Géométrie plane une hyperbole, dans l'espace l'hyperboloïde à deux nappes engendré par l'hyperbole précédente tournant autour de la droite qui joint les deux points donnés, lesquels en sont les foyers. Conséquences analogues aux deux précédentes.

34. Le lieu des points d'un plan équidistants d'une droite et d'un point fixe situés dans ce plan est une parabole.

Conséquences. — (*a*) Le lieu des points équidistants d'un point et d'un plan fixes est un paraboloïde engendré par la révolution, autour de son axe, de la parabole qui a pour foyer le point fixe, et pour directrice l'intersection du plan fixe avec un plan quelconque mené par le point perpendiculairement au plan donné.

Remarque. — Cette conséquence et les lieux dans l'espace énoncés sous les n°s 32 et 33 fournissent des exemples des méthodes 6° et 4° (p. 18) expliquées pour la recherche des lieux dans l'espace, consistant à couper le lieu par des plans convenablement choisis, pour appliquer ensuite, aux résultats trouvés, la rotation autour d'axes fixes. La suite de cette énumération en donnera encore de nombreux exemples.

(*b*) Le lieu des points de l'espace équidistants d'un plan fixe et d'une droite fixe parallèle au plan est un cylindre parabolique ayant ses génératrices parallèles à la droite, et pour section droite une parabole dont le foyer et la directrice sont les intersections de son plan avec la droite et le plan donnés.

(*c*) Le lieu des centres des circonférences passant par un point fixe et tangentes à une droite donnée est une parabole ayant pour foyer et directrice le point et la droite.

(*d*) Le lieu des centres des sphères passant par un point et tangentes à un plan donné est un paraboloïde de révolution ayant pour foyer et pour plan directeur le point et le plan.

(*e*) Le lieu des centres des sphères tangentes à un plan et à une droite parallèle au plan est un cylindre parabolique.

II. — LIEUX ÉTABLIS DANS LE PREMIER LIVRE ET LEURS ANALOGUES DANS L'ESPACE.

35. Le lieu des points équidistants de deux points donnés est en Géométrie plane la droite perpendiculaire à celle qui joint les deux points en son milieu; dans l'espace, le plan perpendiculaire à la même droite en son milieu.

Conséquences. — (*a*) Le lieu des centres des cercles passant par deux points fixes est une droite en Géométrie plane, un plan dans l'espace.

(*b*) Le lieu des centres des sphères passant par deux points fixes est un plan.

(*c*) Le lieu des points équidistants de trois points donnés est une droite perpendiculaire au plan des trois points, et passant par le centre de la circonférence que déterminent ces trois points.

Cette perpendiculaire est en même temps le lieu des centres des sphères passant par les trois points.

36. *Le lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent est : en Géométrie plane, l'ensemble des deux bissectrices des angles formés par ces droites; dans l'espace, l'ensemble des plans menés par ces deux bissectrices perpendiculairement au plan des deux droites données.*

Cas particulier. — Si les deux droites sont parallèles, l'une des deux bissectrices est rejetée à l'infini, et le lieu devient : en Géométrie plane, la parallèle aux deux droites menée par le milieu d'une perpendiculaire commune; dans l'espace, le plan perpendiculaire au plan des deux droites mené par la droite précédente.

Conséquences. — (a) Le lieu des centres des cercles tangents à deux droites qui se coupent est l'ensemble des bissectrices des angles formés par ces droites.

(b) Le lieu des centres des sphères tangentes à deux droites qui se coupent est l'ensemble des deux plans menés par ces bissectrices perpendiculairement au plan de l'angle.

(c) Le lieu des points également distants de trois droites concourantes non situées dans un même plan se compose de quatre droites passant par le point de concours des trois données, qui sont les intersections des plans menés par les bissectrices des faces de huit trièdres que forment les trois droites indéfinies, perpendiculairement aux plans de ces faces. Ce lieu est en même temps le lieu des centres des sphères tangentes aux trois droites données.

Cas particulier. — La conclusion subsiste quand le point de concours des trois droites s'éloigne à l'infini et se modifie comme il suit : Le lieu des points également distants de trois droites parallèles non situées dans un même plan est une droite qui leur est parallèle, menée par le centre du cercle

circonscrit à une section droite quelconque du prisme triangulaire qu'elles déterminent.

37. Le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent est l'ensemble des deux plans bissecteurs des dièdres qu'ils forment.

Cas particulier. — Le lieu des points équidistants de deux plans parallèles est un plan qui leur est parallèle, mené par le milieu d'une perpendiculaire commune.

Conséquences. — (*a*) Le lieu des centres des sphères tangentes à deux plans qui se coupent est l'ensemble de ces deux plans bissecteurs.

(*b*) Le lieu des points également distants de trois plans qui n'ont qu'un point commun se compose de quatre droites, intersections des plans bissecteurs des dièdres, dans les huit trièdres que forment les trois plans.

Ces droites forment en même temps le lieu des centres des sphères tangentes aux trois plans donnés.

Cas particulier. — Si le point commun aux plans s'éloigne à l'infini, la conclusion se transforme ainsi : Le lieu des points équidistants des trois faces d'une surface prismatique triangulaire se compose de quatre droites qui sont les parallèles aux arêtes menées par les centres des cercles inscrit et exinscrits à une section droite quelconque.

38. Le lieu des points situés à une distance d d'une droite est en Géométrie plane l'ensemble de deux droites parallèles à la première; dans l'espace, un cylindre de révolution ayant pour axe la droite et pour rayon d.

Conséquences. — (*a*) Le lieu des centres des cercles de rayon R, tangents à une droite, est en Géométrie plane l'en-

semble de deux droites parallèles à la première, à la distance R de celle-ci ; dans l'espace, la surface d'un cylindre de révolution.

(b) Le lieu des centres des sphères de rayon R tangentes à une droite est la surface d'un cylindre de révolution.

39. Le lieu des points situés à une distance d d'un plan se compose de deux *plans parallèles* au premier.

III. — LIEUX ÉTABLIS DANS LE DEUXIÈME LIVRE ET LEURS ANALOGUES DANS L'ESPACE.

40. Le lieu des milieux des cordes de longueur donnée dans un cercle est une circonférence concentrique. Dans une sphère, c'est une sphère concentrique.

Si l'on observe que le lieu est tangent à toutes les positions de la corde mobile, on peut dire encore que l'*enveloppe* des cordes de longueur donnée dans un cercle est une circonférence concentrique, et dans la sphère une sphère concentrique.

Conséquence. — Le lieu des centres des sections planes d'aire donnée dans une sphère est une sphère concentrique, qui est en même temps l'enveloppe des plans de ces sections.

41. Le lieu des points d'où l'on voit un segment de droite sous un angle donné est, en Géométrie plane, l'ensemble de deux arcs de cercles limitant les segments capables de l'angle donné décrits sur la droite comme corde ; dans l'espace, la surface de révolution engendrée par ces deux arcs tournant autour de la droite.

Cas particulier. — Si l'angle est droit, le lieu est la cir-

conférence ou la sphère décrite sur la droite limitée comme diamètre.

Autre énoncé. — Le lieu décrit par le sommet d'un angle de grandeur invariable, dont les côtés glissent sur deux points fixes, se compose de deux arcs de cercles en Géométrie plane, d'une surface de révolution dans l'espace.

Conséquence. — Le lieu des sommets des triangles de base fixe AB tels que les angles à la base aient une somme constante se compose, dans un plan, de deux arcs de cercles symétriques par rapport à cette base, car l'angle au sommet est constant.

42. Le lieu des milieux des cordes d'un cercle dont les directions passent par un point donné A est la portion intérieure au cercle de la circonférence décrite sur la droite, joignant le point A au centre comme diamètre.

Le lieu des milieux des cordes analogues dans une sphère est la portion intérieure à cette sphère d'une autre sphère ayant pour diamètre la droite qui joint le point au centre de la sphère donnée.

Cas particulier. — Si le point A est à l'infini, nous retrouvons, comme conséquence de ce qui précède, des théorèmes connus :

Le lieu des milieux des cordes d'un cercle parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction.

Le lieu des milieux des cordes analogues dans une sphère est toute la portion intérieure à la sphère du plan mené par le centre perpendiculairement à la direction donnée.

43. Le lieu des centres des sections faites dans une sphère

par des plans passant par un point fixe A est la portion intérieure à la sphère donnée d'une autre sphère ayant pour diamètre la droite qui joint le point au centre.

Cas particulier. — Le lieu des centres des sections parallèles à une droite donnée est la surface du grand cercle perpendiculaire à cette droite.

44. Le lieu des centres des sections faites dans une sphère par des plans passant par une droite fixe est la portion intérieure à la sphère d'une circonférence située dans le plan mené par le centre de la sphère perpendiculaire à la droite, le diamètre de cette circonférence étant la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur la droite.

Cas particulier. — Si la droite est à l'infini, on retrouve ce théorème connu : *Le lieu des centres des sections faites dans une sphère par des plans parallèles est le diamètre de la sphère perpendiculaire à ces plans.*

45. Le lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées de chacun sur les trois côtés d'un triangle aient leurs pieds en ligne droite est, en Géométrie plane, la circonférence circonscrite au triangle, et dans l'espace le cylindre ayant cette circonférence pour section droite.

IV. — LIEUX TIRÉS DU TROISIÈME LIVRE ET LEURS ANALOGUES DANS L'ESPACE.

46. Le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun à deux points fixes A, B ait une valeur donnée est, en Géométrie plane, une circonférence, dans l'espace une sphère; toutes deux ont pour diamètre la portion de la droite

passant par les points fixes qui est comprise entre les deux points conjugués harmoniques divisant la droite AB dans le rapport donné.

Cas particulier. — Si le rapport est égal à l'unité, on retrouve le lieu des points équidistants de deux points donnés.

47. Le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de chacun à deux points fixes A, B ait une valeur donnée est, en Géométrie plane, une circonférence, et dans l'espace une sphère; toutes deux ont pour centre le milieu de AB.

48. Le lieu des points tels que la différence des carrés des distances de chacun à deux points fixes A, B ait une valeur donnée est, en Géométrie plane, une droite; dans l'espace, un plan perpendiculaire à AB.

Cet énoncé suppose que la différence $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2$ des deux distances doit être prise avec un signe déterminé, MA étant, par exemple, plus grand que MB; si, au contraire, on ne considérait que la valeur absolue de cette différence, de manière que, M étant un point du lieu, parce qu'on a $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k^2$, N sera aussi un point du lieu si l'on a $\overline{NB}^2 - \overline{NA}^2 = k^2$, alors le lieu se compose de deux droites ou de deux plans.

Cas particulier. — Si la différence est nulle, on retrouve le lieu des points équidistants de deux points donnés.

49. Le lieu des points tels que la perpendiculaire abaissée de chacun sur une droite fixe limitée AB la divise en deux segments additifs et soit moyenne proportionnelle entre ces deux segments est, en Géométrie plane, une circonférence, et dans l'espace une sphère. Toutes deux ont pour diamètre AB.

50. (*a*) Le lieu des points qui divisent dans un rapport donné, positif ou négatif, les segments de droites parallèles à une direction donnée et limités à deux droites concourantes OA, OB est une droite passant par leur point de concours O.

(*b*) Le lieu des points qui divisent dans un rapport donné, positif ou négatif, les segments de droites parallèles à une direction donnée, compris entre deux plans P, Q qui se coupent, est un plan passant par l'intersection des deux premiers.

Cas particuliers. — 1° Si les deux droites données A, B sont parallèles, le lieu est une droite qui leur est parallèle.

2° Si les plans P et Q sont parallèles, le lieu est un troisième plan qui leur est parallèle.

3° Si le rapport donné est égal à (— 1), on a le lieu des milieux des droites parallèles à une direction donnée.

51. **Lieux fournis par la théorie des axes et plans radicaux.** — (*a*) Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux circonférences situées dans le même plan est une droite perpendiculaire à la ligne des centres qu'on appelle l'*axe radical* des deux circonférences.

Autre énoncé. — Le lieu des points d'où l'on peut mener à deux circonférences des tangentes égales est la portion, extérieure aux deux circonférences d'une droite, qui est leur axe radical.

(*b*) Le lieu des centres des cercles coupant orthogonalement deux cercles donnés est leur axe radical.

(*c*) Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres qu'on appelle le *plan radical* de deux sphères.

La portion de ce plan extérieure aux deux sphères est en

même temps le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux sphères des tangentes égales.

(*d*) Le lieu des points d'égale puissance par rapport à trois sphères est une droite perpendiculaire au plan des trois centres qu'on appelle *axe radical des trois sphères*.

C'est en même temps le lieu des points d'où l'on peut mener aux trois sphères des tangentes égales.

52. **Lieux fournis par la théorie des figures homothétiques.** — Ils résultent tous de la définition et de ce fait qu'on obtient des figures égales à toutes celles qui sont semblables à une figure donnée en prenant un centre d'homothétie arbitraire et faisant varier le rapport de similitude de zéro à l'infini.

Chaque espèce de figure conduirait ainsi à un ou plusieurs lieux géométriques par la seule application de la définition, combinée avec l'une des méthodes de transformation précédemment étudiées. Nous en avons d'ailleurs eu déjà un exemple, en combinant l'homothétie avec la méthode de rotation.

Il n'y a donc pas lieu d'examiner ces lieux en détail, mais de considérer seulement l'homothétie comme méthode générale de transformation des figures.

53. Il en est de même de la méthode des *pôles et polaires*, étudiée directement en Géométrie élémentaire pour deux droites, pour le cercle et la sphère, étendue facilement à deux plans, puis aux coniques, par la méthode des projections.

La même observation s'applique également à la méthode de transformation par *rayons vecteurs réciproques*.

54. Le lieu des tangentes menées à une surface par un point extérieur S est un cône circonscrit à la surface.

Cas particuliers. — 1° Si la surface donnée est un cône ou un cylindre, le lieu se compose d'un système de deux plans tangents; et le lieu des points de contact, d'un système de deux droites qui sont les génératrices de contact.

2° Si la surface est une sphère, le cône circonscrit est de révolution; et le lieu des points de contact, un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe du cône. Ce plan n'est autre que le plan polaire du point par rapport à la sphère.

Ce cône peut encore être considéré comme lieu des droites menées par le point donné S à une distance R d'un point donné O qui est le centre de la sphère.

Cas limite. — Si S s'éloigne à l'infini, les conclusions deviennent les suivantes : Le lieu des tangentes menées à une surface parallèlement à une direction donnée est un cylindre circonscrit à la surface. Quand la surface donnée est cône ou cylindre, le lieu se compose de deux plans tangents; et le lieu des points de contact, du système des deux génératrices de contact. Dans le cas de la sphère, ce cylindre circonscrit est de révolution, et la courbe de contact est la circonférence de grand cercle ayant son plan perpendiculaire à la direction donnée.

55. (*a*) Le lieu des droites menées par un point et faisant avec une droite donnée Δ un angle donné est la surface d'un cône de révolution ayant pour sommet le point donné, pour axe une parallèle à Δ menée par ce point et pour demi-angle au sommet l'angle donné.

(*b*) Le lieu des droites menées par un point et faisant avec un plan P un angle donné est la surface d'un cône de révolution ayant pour sommet le point, pour axe une perpendiculaire au plan P, et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle donné.

V. — LIEUX RÉSULTANT DE LA THÉORIE DES COURBES USUELLES.

56. 1° Lieu des points également distants d'une circonférence et d'un point situé dans son plan.

En Géométrie plane, c'est une ellipse si le point est intérieur, une hyperbole si le point est extérieur. S'il est sur la circonférence, c'est une droite indéfinie passant par le point et par le centre de la circonférence. Toutefois il faut prendre comme mesure de la distance d'un point du lieu à la circonférence non forcément la plus petite normale, mais celle dont le pied est au point donné. Dans ce cas, la portion de droite intérieure au cercle est limite d'ellipse obtenue en faisant tendre le point donné, pris à l'intérieur, vers la circonférence; la portion extérieure est limite d'hyperbole. Dans l'espace, le lieu est le cylindre ayant pour section droite le lieu plan précédent.

2° Le lieu des points équidistants d'une sphère et d'un point est une ellipsoïde de révolution si le point est intérieur à la sphère; un hyperboloïde de révolution à deux nappes s'il est extérieur, une droite s'il est sur la sphère.

Conséquences. — (a) Le lieu des centres des cercles tangents à un cercle donné et passant par un point pris dans son plan est une ellipse, une hyperbole ou une droite, suivant que le point est intérieur au cercle, ou extérieur, ou sur la circonférence.

(b) Le lieu des centres des sphères tangentes à une sphère donnée et passant par un point donné est un ellipsoïde de révolution ou un hyperboloïde à deux nappes ou une droite, suivant que le point est intérieur à la sphère, ou extérieur, ou sur la sphère.

57. 1° Le lieu des points d'un plan tels que la somme ou

la différence des distances de chacun à deux circonférences données dans ce plan ait une valeur donnée *m* est une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les deux centres. Le genre de la conique dépend de la valeur de *m* et des positions relatives des deux circonférences.

2° Le lieu des points de l'espace tels que la somme ou la différence des distances de chacun à deux sphères ait une valeur donnée *m* est un ellipsoïde de révolution ou un hyperboloïde à deux nappes, ayant pour foyers les centres des deux sphères.

Cas particulier. — Si la différence est donnée égale à zéro, les conclusions s'appliquent : (*a*) Le lieu des points d'un plan également distants de deux circonférences données dans ce plan est une ellipse ou une hyperbole : ellipse quand une circonférence est intérieure à l'autre, hyperbole quand elles sont extérieures; enfin quand elles se coupent, le lieu se compose d'arcs d'ellipse et d'hyperbole homofocales, si l'on mesure la distance d'un point à chaque circonférence au moyen de la plus petite normale.

Dans l'espace c'est un cylindre ayant pour section droite le lieu plan précédent.

(*b*) Le lieu des points équidistants de deux sphères est, dans les mêmes circonstances, un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à deux nappes, ou une combinaison de ces deux surfaces.

Conséquences. — (A) Le lieu des centres des circonférences tangentes à deux circonférences données dans un plan se compose d'ellipses et d'hyperboles, suivant que le contact est extérieur ou intérieur.

(B) Le lieu des centres des sphères tangentes à deux sphères données se compose d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à deux nappes.

58. 1° Le lieu des points d'un plan tels que la somme ou la différence des distances de chacun à un cercle et à une droite situés dans ce plan ait une valeur donnée est une parabole ayant pour foyer le centre du cercle, et pour directrice une parallèle à la droite.

2° Le lieu des points tels que la somme ou la différence des distances de chacun à une sphère et à un plan ait une valeur donnée est un paraboloïde de révolution ayant pour foyer le centre de la sphère, et son axe perpendiculaire au plan.

Cas particulier. — Les conclusions subsistent pour la différence lorsqu'elle est nulle, et l'on a le lieu des points équidistants d'une circonférence et d'une droite, ou d'une sphère et d'un plan.

Dans l'espace le lieu des points équidistants d'une circonférence et d'une droite données dans un même plan est un cylindre ayant pour section droite la parabole qui constitue le lieu dans ce plan.

Conséquences. — (*a*) Le lieu des centres des cercles tangents à une droite et à une circonférence données dans un même plan se compose de deux paraboles ayant pour foyer commun le centre de la circonférence, et pour directrices des parallèles à la droite menées à une distance de celle-ci égale au rayon [1].

(*b*) Le lieu des centres des sphères tangentes à un plan et à une sphère se compose de deux paraboloïdes de révolution ayant pour foyer commun le centre de la sphère et pour plans directeurs des plans menés parallèlement au plan donné, à une distance égale au rayon de la sphère.

---

[1] La démonstration sera développée au § 96, troisième lieu.

VI. — LIEUX SE DÉDUISANT IMMÉDIATEMENT DES PRÉCÉDENTS.

59. Le lieu des extrémités des tangentes de même longueur menées à une circonférence ou à une sphère est une circonférence ou une sphère concentrique.

60. 1° Le lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous un angle donné une circonférence située dans ce plan est une circonférence concentrique.

2° Le lieu des sommets des cônes de même angle circonscrits à une sphère est une sphère concentrique.

61. Le lieu des points de concours des hauteurs de tous les triangles situés dans un même plan, ayant même base fixe et même angle au sommet A, se compose de deux arcs de cercles, limitant les segments capables de l'angle $(2d - A)$ décrits sur cette base.

De même, les lieux des centres des cercles inscrits ou circonscrits à tous ces triangles sont des arcs de cercles passant par les extrémités de la base. Le lieu du centre de gravité est l'ensemble de deux arcs de cercles homothétiques aux arcs sur lesquels se déplace A, le centre de similitude étant le milieu de la base fixe, et le rapport de similitude $\frac{1}{3}$.

62. 1° Le lieu des points d'un plan tels que la somme ou la différence des distances de chacun à deux droites fixes concourantes de ce plan ait une valeur donnée se compose de deux droites perpendiculaires aux bissectrices des angles que forment les droites données. Il convient d'attribuer des signes à ces perpendiculaires pour l'interprétation des points dans les quatre angles.

La conclusion subsiste si les distances, au lieu d'être comptées normalement aux droites, sont évaluées parallèlement à des directions données.

2° Le lieu des points tels que la somme ou la différence des distances de chacun à deux plans fixes qui se coupent ait une valeur donnée se compose de deux plans parallèles à l'intersection des deux premiers, et perpendiculaires aux plans bissecteurs des dièdres qu'ils forment.

Cas limites. — (a) Si les deux droites sont parallèles et que l'on considère les deux distances comme positives pour tout point pris entre les deux parallèles, le lieu n'existe pas pour la somme, excepté si elle est égale à la distance des deux parallèles; et, dans ce cas, tous les points du plan répondent à la question.

Pour la différence, le lieu se compose de deux parallèles aux deux droites données.

(b) Des conclusions analogues conviennent pour la somme ou la différence des distances à deux plans parallèles.

(c) Dans le cas de deux droites parallèles, le lieu des points de l'espace satisfaisant à l'énoncé précédent est simple, mais il n'y a pas à attribuer de signes aux perpendiculaires qui mesurent ces distances.

Le lieu des points de l'espace tels que la somme des distances de chacun à deux droites parallèles ait une valeur donnée, est un cylindre elliptique ayant ses génératrices parallèles aux deux droites, celles-ci étant le lieu des foyers de toutes les sections droites. Le lieu n'existe que si la somme donnée est supérieure à la distance des deux parallèles. Si elle lui est égale, le lieu se réduit aux deux droites elles-mêmes, avec toute la portion de leur plan comprise entre ces deux droites.

Pour la différence, le lieu n'existe que si la différence donnée est inférieure à la distance des deux droites; et alors c'est un cylindre hyperbolique.

63. 1° Le lieu des points d'un plan tels que le rapport des

distances de chacun à deux droites fixes concourantes de ce plan ait une valeur donnée est une droite passant par le point de concours des deux premières.

Si l'on n'attribuait pas de signes aux perpendiculaires et que, par suite, on ne considérât que le rapport de leurs valeurs absolues, le lieu se composerait de deux droites, une dans chacun des angles que forment les droites.

2° Le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun à deux plans qui se coupent ait une valeur donnée est un plan passant par l'intersection des deux premiers.

Cas particuliers. — 1° Les conclusions subsistent quand on considère deux droites parallèles ou deux plans parallèles.

2° Quand le rapport est égal à 1 ou — 1, on retrouve les bissectrices des angles formés par les deux droites ou les plans bissecteurs des dièdres formés par les deux plans.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DES MÉTHODES GÉNÉRALES A LA RECHERCHE DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Considérations de symétrie et points remarquables.

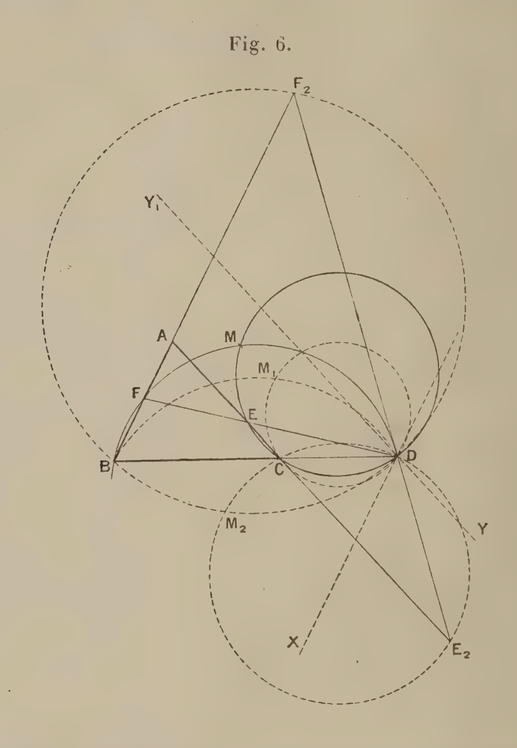
64. **Construction du lieu et points remarquables.** — *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* D *sur le côté* BC, *on mène par ce point une transversale variable, qui rencontre en* E *le côté* AC, *en* F *le côté* AB. *On considère les circonférences circonscrites aux triangles* CDE, BDF; *elles se coupent en* D *et en un deuxième point* M *dont on demande le lieu.*

Prenons DA comme position initiale de la sécante (*fig.* 6); E, F sont confondus avec A, et l'on obtient A comme point de lieu. Faisons tendre la transversale vers DB, en passant par la position intermédiaire quelconque DEF. Alors F est venu en B; BF est donc une tangente à la seconde circonférence, qui dès lors est déterminée par deux points B, D, et la tangente BA en l'un d'eux; l'autre circonférence est déterminée par les points C, D, et la tangente CA au premier, donnant un point M_1 du lieu.

Puis la transversale, passant au-dessous de DB, arrive à la position DX parallèle à AB. Alors, F étant à l'infini, la circonférence correspondante a son centre à l'infini, sur la perpendiculaire à BD en son milieu; elle se réduit donc à

la droite BCD, qui rencontre l'autre circonférence en C, deuxième point remarquable du lieu. On a obtenu jusqu'ici un arc passant par les trois points A, M, C. La transversale continuant à tourner, M passe en dessous de BC. Soit M_2 la position correspondant à la transversale F_2DE_2. Il décrit

Fig. 6.



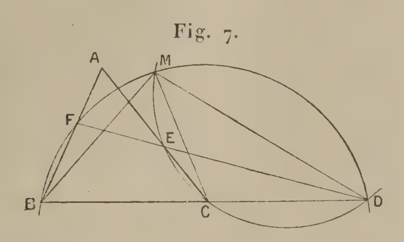
alors un arc CM_2B, B étant atteint lorsque la transversale prend la position YDY_1 parallèle à CA. Puis le point M repasse au-dessus de DB et décrit l'axe BA, revenant au point de départ quand la transversale a tourné de 180°.

La forme du lieu concorde avec l'hypothèse d'une circonférence circonscrite au triangle ABC. Nous allons en effet la démontrer en évaluant l'angle sous lequel un côté du

triangle (nous choisirons le côté BC) est vu de tout point du lieu.

Considérons d'abord un point M du lieu situé du même côté que A, par rapport à BC (*fig.* 7).

Fig. 7.



On a évidemment

$$\widehat{BMC} = \widehat{BMD} - \widehat{CMD}.$$

Or

$\widehat{BMC} = \widehat{BFD}$ comme inscrits dans le même segment.

$\widehat{CMD} = \widehat{CED}$ comme inscrits dans le même segment.

Donc

$$\widehat{BMC} = \widehat{BFD} - \widehat{CED}.$$

Or $\widehat{CED} = \widehat{AEF}$ comme opposés par le sommet; d'un autre côté $\widehat{BFD}$ est extérieur au triangle AFE; on a

$$\widehat{BFD} = \widehat{AEF} + \widehat{A},$$

par suite

$$\widehat{BFD} - \widehat{AEF} = \widehat{A}$$

ou

$$\widehat{BMC} = \widehat{A}.$$

Le même raisonnement s'appliquerait à tout point du lieu situé au-dessus de BC, mais à gauche de A; dès lors tout point du lieu au-dessus de BC appartient à la circonférence circonscrite au triangle ABC.

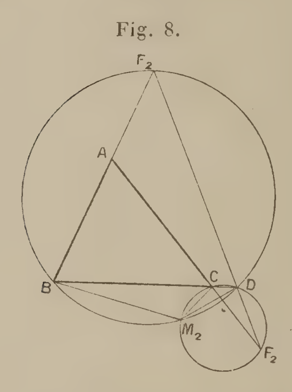
Considérons maintenant un point M_2 au-dessous de BC (*fig.* 8). On a de même

$$\widehat{CM_2B} = \widehat{BM_2D} - \widehat{CM_2D}.$$

Or, dans le quadrilatère inscrit BM_2DF_2, on a

$$\widehat{BM_2D} = 2d - \widehat{F}_2.$$

Fig. 8.



En outre $CM_2D = E_2$ comme inscrits dans le même segment.

Donc

$$\widehat{CM_2B} = 2d - (F_2 + E_2) = \widehat{F_2AE_2},$$

puisque dans le triangle AE_2F_2 la somme des angles est égale à deux droits.

Or

$$\widehat{F_2AE_2} = 2d - A,$$

donc

$$\widehat{BM_2C} = 2d - A,$$

et le point M appartient à l'arc inférieur de la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Le point M parcourt donc d'un mouvement continu toute la circonférence, qui dès lors est le lieu demandé.

Il est inutile ici de démontrer que, réciproquement, tout point de la circonférence est un point du lieu.

Généralisation. — 1° Le raisonnement est indépendant de la position du point D sur CB. Il n'est même pas nécessaire que D soit fixe. Le lieu resterait le même, si l'on considérait une transversale DEF se déplaçant suivant une loi arbitraire. Le plus simple serait de l'assujettir à passer par un point fixe à distance finie ou infinie.

2° Le raisonnement subsiste encore si le point D n'est pas sur BC; il peut occuper toutes les positions dans le plan, autres que les trois sommets du triangle. D'où cet énoncé général : Une transversale variable arbitraire coupe les côtés AC, AB d'un triangle ABC en des points E, F; si l'on considère les deux circonférences déterminées par un point arbitraire D de la transversale adjoint aux deux points B, F pour l'une, aux points C, E pour l'autre, elles se coupent en un deuxième point variable M. Le lieu de toutes les positions de M est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

65. **Axes de symétrie, points remarquables.** — *Étant donnés deux points* A *et* B *sur une droite indéfinie, trouver le lieu des points tels que la perpendiculaire abaissée de chacun sur* AB *divise celle-ci en segments soustractifs, et soit moyenne proportionnelle entre ces deux segments.*

Il y a évidemment deux axes de symétrie qui sont AB et la perpendiculaire à cette droite en son milieu. A et B sont des sommets du lieu.

De plus, à mesure que la perpendiculaire MP correspondant à un point M du lieu s'éloigne de part et d'autre de A et de B, MP croît jusqu'à l'infini; donc la courbe présente

quatre branches infinies. Cherchons les directions asymptotiques données par les positions limites vers lesquelles tend la droite OM joignant un point variable du lieu à un point fixe quelconque; nous choisissons ce dernier confondu avec le centre O de la courbe, pour simplifier.

On a

$$\overline{MP}^2 = PA.PB = (OP + OA)(OP - OA) = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2.$$

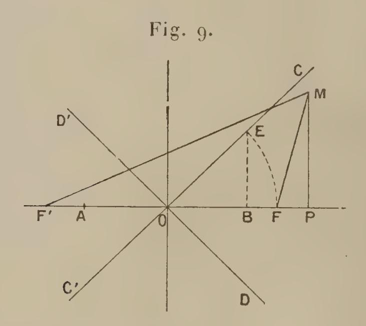
D'où

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{OP}^2} = 1 - \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OP}^2}.$$

Or si OP croît indéfiniment $\lim\left(\frac{OA}{OP}\right) = 0$, et, par suite, $\lim\frac{MP}{OP} = 1$. La direction limite de OM est donc inclinée de 45° sur AB.

La forme du lieu s'accorde avec l'hypothèse d'une hyperbole équilatère ayant pour sommets A et B, et pour asym-

Fig. 9.



ptotes les droites COC', DOD' inclinées de 45° sur AB (*fig.* 9). Nous allons démontrer que tel est le lieu.

Les foyers F, F' de l'hyperbole ainsi définie s'obtiennent en menant BE perpendiculaire à AB jusqu'à une asymptote, et rabattant OE sur les directions OB et OA. Il suffit donc

de prouver que $MF' - MF = AB$, que je représente par $2a$.

Or dans le triangle rectangle MFP, on a

$$\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$$

ou, en remplaçant $\overline{MP}^2 = PA.PB$ par sa valeur $\overline{OP}^2 - a^2$ et PF par (OP — OF) en valeur absolue, c'est-à-dire par $OP - a\sqrt{2}$, il vient

$$\begin{aligned}\overline{MF}^2 &= \overline{OP}^2 - a^2 + (OP - a\sqrt{2})^2 \\ &= 2\overline{OP}^2 - 2a\,OP\sqrt{2} + a^2 = (OP\sqrt{2} - a)^2.\end{aligned}$$

On aura de même MF′ par la considération du triangle rectangle MPF′

$$\overline{MF'}^2 = (OP\sqrt{2} + a)^2.$$

Prenons les racines carrées en remarquant que, d'après la nature de la question, on a toujours $OP > a$ et *a fortiori*

$$OP\sqrt{2} - a > 0,$$
$$MF = OP\sqrt{2} - a,$$
$$MF' = OP\sqrt{2} + a,$$

d'où, en soustrayant,

$$MF' - MF = 2a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si P était à gauche de A, c'est au contraire MF qui aura pour valeur $OP\sqrt{2} + a$, MF′ la valeur $OP\sqrt{2} - a$, et leur différence est encore $2a$.

66. On peut traiter d'une manière analogue le problème suivant :

Trouver le lieu des points d'un plan tels que le produit des distances de chacun à deux droites concourantes de ce plan ait une valeur donnée de k^2.

C'est une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites. Les foyers sont à une distance du centre égale à $\frac{2k}{\sin 2\alpha}$, et l'axe transverse est égal à $\frac{2k}{\sin \alpha}$, α désignant la moitié de l'angle des asymptotes contenant la courbe.

Le calcul des rayons vecteurs, assez long quand l'angle α est quelconque, se simplifie notablement quand il est droit.

DEUXIÈME MÉTHODE.

Substitutions successives.

67. En général, pour l'application de cette méthode, il convient de construire un point quelconque du lieu d'après la définition et de le relier aux points remarquables ou à des points fixes, puis de chercher, entre les éléments de la figure ainsi construite, des relations pouvant ramener à des lieux plus simples ou connus.

68. *Lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous des angles égaux deux circonférences données dans ce plan.*

La ligne des centres est évidemment un axe de symétrie, et chaque centre de similitude est un point remarquable du lieu, pourvu qu'il soit extérieur aux deux cercles.

Soit M un point quelconque du lieu, c'est-à-dire un point tel que si l'on mène de ce point les deux tangentes à chaque circonférence, on forme deux angles égaux $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$. Joignons M aux deux centres O, O', et menons les rayons de contact OA, O'D (*fig.* 10). Les triangles rectangles ainsi formés sont semblables comme ayant un angle aigu

égal, car

$$\widehat{AMO} = \frac{AMB}{2},$$

$$\widehat{DMO'} = \frac{CMD}{2};$$

donc

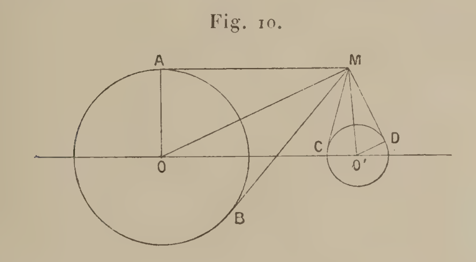
$$\widehat{AMO} = \widehat{DMO'};$$

d'où la proportion

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{OA}{O'D} = \frac{R}{R'} = \text{const.}$$

Réciproquement, tout point M extérieur aux deux cercles satisfaisant à cette dernière égalité est un point du lieu, car si l'on mène les tangentes de ce point, les triangles rec-

Fig. 10.



tangles OAM, O'MD sont semblables comme ayant leurs côtés proportionnels et alors $\widehat{OMA} = \widehat{O'MD}$. On est donc ramené au lieu des points tels que le rapport des distances de chacun à deux points fixes O, O' ait une valeur donnée $\frac{R}{R'}$. C'est la circonférence ayant pour diamètre le segment de droite compris entre les deux centres de similitude.

Quand les deux cercles donnés ne sont pas extérieurs l'un à l'autre, le lieu est constitué uniquement par les portions de cette circonférence qui sont extérieures aux deux cercles donnés; quand ils se coupent, la circonférence passe aux deux points communs; il n'y a pas de lieu quand les deux

cercles sont intérieurs l'un à l'autre, ce qui est évident *a priori*.

Remarque. — L'observation relative au cas où les deux cercles se coupent prouve que les droites qui joignent chaque point d'intersection de deux cercles aux deux centres de similitude sont rectangulaires.

Par analogie, le lieu des sommets communs à deux cônes de même angle circonscrits à deux sphères est une sphère, ou portion de sphère, ayant pour diamètre le segment de droite compris entre les deux centres de similitude.

En effet, si l'on considère le plan déterminé par un point quelconque du lieu et par les deux centres, les points du lieu contenus dans ce plan forment un cercle, qu'il suffit de faire tourner autour de la ligne des centres pour obtenir tout le lieu.

69. *Un losange* ABMD *se déforme de manière que ses côtés conservent une longueur constante; pendant que le sommet* A *décrit une circonférence de centre* O, *les deux sommets contigus* B, D *demeurent à une même distance constante d'un point* C *de la circonférence : trouver le lieu décrit par le quatrième sommet* M (*fig.* 11).

Le diamètre passant par le point fixe C est un axe de symétrie. Joignons le point M du lieu au point fixe C et au sommet A. La droite AM, diagonale du losange, est perpendiculaire à la seconde diagonale BD en son milieu; d'un autre côté, le triangle CBD étant isoscèle par définition, cette perpendiculaire passe au sommet C, et CAM est une ligne droite.

Cela posé, si E désigne le point de concours des diagonales du losange, BE se trouve côté de l'angle droit commun aux deux triangles rectangles ABE, CBE. Égalons entre elles les

deux expressions de son carré déduites de ces triangles

$$\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CE}^2,$$

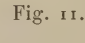
d'où

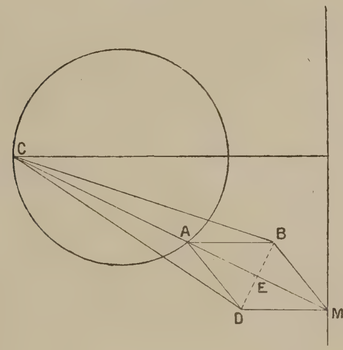
$$\overline{CE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = \text{const.};$$

or

$$\overline{CE}^2 - \overline{AE}^2 = (CE + AE)(CE - AE) = CM.CA.$$

Donc le produit CM. CA étant constant, le lieu de M est la figure inverse du lieu de A, par rapport au point C, et


Fig. 11.



par suite une droite perpendiculaire au diamètre issu du point C dans la circonférence que décrit le point A.

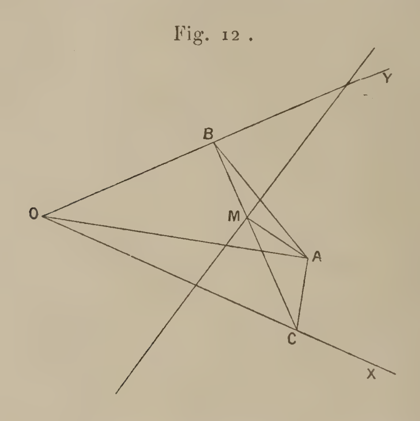
Remarque. — La figure a été faite en supposant $CB > AB$. Dans le cas contraire, la conclusion s'appliquerait encore; seulement la puissance d'inversion $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$ étant négative, M serait sur AC prolongée au delà de C.

70. *Étant donné un angle* XOY (*fig.* 12), *un autre angle de sommet fixe* A, *égal au supplément du premier et situé dans le même plan, tourne autour de* A *et rencontre*

en B, C *les côtés du premier : trouver le lieu du point* M *qui divise* BC *dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Joignons le point M du lieu au point fixe A. Le quadrilatère ABOC est inscriptible, d'après l'hypothèse. Par suite les angles B, C du triangle ABC sont égaux aux angles AOX,

Fig. 12.



AOY. Ce triangle reste semblable à lui-même pendant la rotation de l'angle A, et le rapport $\frac{BC}{AB}$ conserve une valeur constante, que je désigne par K.

Or, de l'hypothèse

$$\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n},$$

on déduit

$$\frac{MB}{BC} = \frac{m}{m+n}.$$

D'où, en multipliant membre à membre avec l'égalité $\frac{BC}{AB} = K$, on tire

$$\frac{MB}{AB} = \frac{mK}{m+n} = \text{const.}$$

Le triangle MBA conserve dès lors un angle invariable

$\widehat{B} = \widehat{AOX}$ compris entre côtés proportionnels. Il reste semblable à lui-même, un sommet A demeurant fixe pendant qu'un deuxième sommet décrit une droite OY; le lieu du troisième sommet M est donc une droite faisant avec YO, lieu de B, un angle égal à $\widehat{MAB}$ (20, 1°).

Cette méthode de démonstration s'applique au cas où les segments déterminés par M sur BC seraient soustractifs, puis aussi au cas où B et C seraient sur les prolongements de YO et de XO.

COMBINAISON DES DEUX PREMIÈRES MÉTHODES.

71. *Une tangente mobile roule sur un cercle inscrit dans un angle droit* XOY. *Par les points* B, A *où elle rencontre les côtés de l'angle, on leur mène des perpendiculaires : trouver le lieu de leur point de rencontre* M.

Le lieu admet un axe de symétrie, la bissectrice de l'angle donné.

En considérant les deux positions dans lesquelles la tangente mobile est parallèle aux côtés de l'angle, on voit que ces droites sont des asymptotes du lieu, car, si je fais tendre la tangente BA vers la position B_1A_1 en abaissant le point B_1, BM tend vers la position B_1A_1; par suite, la position limite de M est sur B_1A_1 à l'infini.

De plus, en examinant les diverses positions de la tangente, on voit qu'il ne peut y avoir de points du lieu que dans l'angle de ces asymptotes qui comprend le cercle, et dans l'angle opposé par le sommet. Cherchons donc à démontrer que ce lieu est une hyperbole équilatère ayant ces deux droites pour asymptotes.

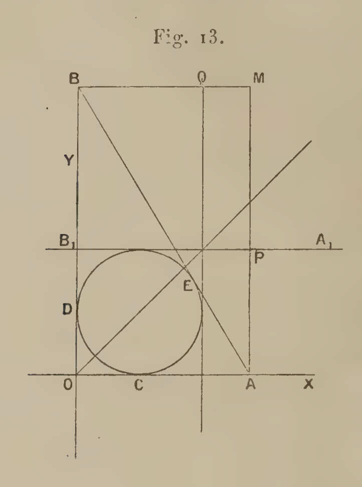
Si P, Q sont les points où les perpendiculaires AM et BM

rencontrent les asymptotes (*fig.* 13), on a

$$MP = BD - R, \qquad MQ = AC - R,$$

en désignant par R le rayon du cercle, puis par C et D les points de contact du cercle avec les côtés de l'angle.

Fig. 13.



Cela posé, le théorème de Pythagore appliqué au triangle AOB donne

$$(BD + R)^2 + (AC + R)^2 = \overline{AB}^2;$$

or

$$AB = AC + BD,$$

d'où

$$(BD + R)^2 + (AC + R)^2 = (AC + BD)^2.$$

Développant et réduisant,

$$2R(BD + AC) + 2R^2 = 2AC.BD.$$

Remplaçant BD et AC par leurs expressions en fonction des perpendiculaires MP, MQ, puis divisant par 2,

$$R(MP + R + MQ + R) + R^2 = (MP + R)(MQ + R)$$

et, en simplifiant,

$$MP.MQ = 2R^2 = \text{const.}$$

Nous sommes donc ramené au lieu des points tels que le produit des distances de chacun à deux droites rectangulaires ait une valeur constante, lieu indiqué précédemment (66); c'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les deux tangentes parallèles aux côtés de l'angle. Il est facile d'en construire les sommets, *a priori*, en considérant les deux positions dans lesquelles la tangente mobile est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle XOY.

Nous ne donnerons pas de nouveaux exemples des deux méthodes de translation et de rotation, leur application, quand elle se présente, étant toujours immédiate

MÉTHODE DES PROJECTIONS. — PROBLÈMES RELATIFS A L'ELLIPSE.

72. **Préliminaires.** — Tout ce qui suit repose sur les théorèmes suivants :

1° *Toute circonférence se projette sur un plan suivant une ellipse.* Le grand axe de cette ellipse est la projection du diamètre parallèle au plan de projection, et le petit axe la projection du diamètre perpendiculaire au premier qui est ligne de plus grande pente ; en sorte que, si a désigne le rayon du cercle et α l'angle que son plan fait avec le plan de projection, les demi-axes de l'ellipse sont a et $b = a\cos\alpha$.

Réciproquement, *toute ellipse peut être considérée comme la projection d'un cercle* dont le plan est parallèle au grand axe de l'ellipse; le rayon du cercle est égal au demi grand axe a; et si b désigne le demi petit axe, l'inclinaison α des deux plans est donnée par l'équation $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.

2° Inversement, *le cercle peut être considéré comme la projection d'une ellipse.*

Considérons en effet un plan de projection parallèle au petit axe de l'ellipse donnée, et faisant avec le plan de cette ellipse un angle α tel que $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, c'est-à-dire tel que le demi grand axe de l'ellipse se projette sur ce plan suivant une droite égale au demi petit axe b. Le cylindre de révolution ayant pour axe la projetante du centre de l'ellipse et pour rayon b sera coupé par le plan de l'ellipse suivant une ellipse ayant ses deux axes confondus avec ceux de l'ellipse (*théorème de Dandelin*), c'est-à-dire suivant cette ellipse elle-même, qui, par suite, a pour projection le cercle base du cylindre.

Il se trouve ainsi démontré que, une ellipse étant donnée, on peut toujours trouver deux directions de plans, parallèles au petit axe, correspondant à la même équation $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ (en prenant α positif ou négatif), tel que ses projections sur ces plans soient des cercles, et que, réciproquement, un cercle étant donné, il existe une infinité d'ellipses dont il est la projection : elles sont toutes les sections planes, non parallèles à l'axe du cylindre de révolution qui a pour directrice ce cercle.

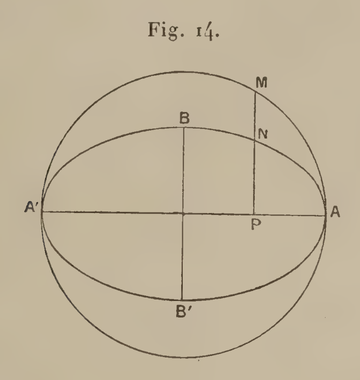
En outre, l'ellipse est la seule courbe plane pouvant se projeter suivant un cercle, car les sections planes du cylindre de révolution sont toutes elliptiques, à l'exception des sections parallèles à l'axe; mais ces dernières, composées chacune de deux génératrices, se projettent suivant deux points seulement.

73. *Étant donnée une circonférence, on augmente ou diminue toutes les ordonnées relatives à un diamètre* AA' (*fig.* 14) *dans un rapport constant : trouver le lieu de leurs extrémités.*

Premier cas. — Supposons d'abord que l'on diminue toutes les ordonnées, de manière qu'à l'ordonnée MP d'un point M du cercle corresponde une ordonnée NP telle que $\frac{NP}{MP} = \lambda < 1$

Désignons par α un angle aigu tel que $\cos\alpha = \lambda$; alors $NP = MP\cos\alpha$. Si donc on fait tourner le plan du cercle autour du diamètre AA′ de l'angle α, on voit que NP est la projection sur le plan primitif de la position prise par MP;

Fig. 14.



par suite N est alors la projection de M, et le lieu demandé est la projection de la circonférence, c'est-à-dire une ellipse ayant pour grand axe AA′, et pour petit axe

$$BB' = AA'\cos\alpha = \lambda . AA';$$

si a et b désignent les demi-axes,

$$\lambda = \frac{b}{a},$$

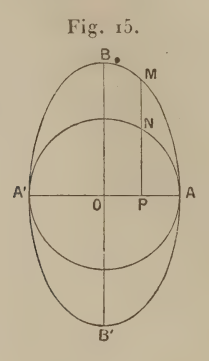
d'où

$$\frac{NP}{MP} = \frac{b}{a}.$$

Deuxième cas. — Supposons, au contraire, que l'on augmente toutes les ordonnées, de manière que $\frac{NP}{MP} = \mu > 1$.

Considérons l'angle aigu β défini par l'équation $\cos\beta = \frac{1}{\mu}$.
Si l'on fait tourner le lieu demandé d'un angle β autour de

Fig. 15.



AA′ (*fig.* 15), il se projette suivant le cercle donné. C'est donc une ellipse ayant pour petit axe AA′ et pour grand axe

$$BB' = \frac{AA'}{\cos\beta} = \mu . AA'.$$

Application. — *Construire une ellipse par points connaissant les deux axes en grandeur et en position.*

Sur les deux axes comme diamètres on décrit deux circonférences; puis, par leur centre commun O on mène une droite qui les rencontre en C et D; par chacun de ces points on mène une perpendiculaire à l'axe correspondant : le point M où se rencontrent ces deux perpendiculaires décrit l'ellipse quand on fait tourner la droite OCD.

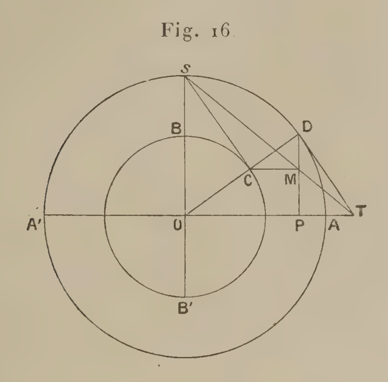
Le parallélisme de CM et OP (*fig.* 16) donne en effet

$$\frac{MP}{DP} = \frac{OC}{OD} = \frac{b}{a}.$$

La tangente à cette ellipse en M est la projection de la tangente en D au cercle décrit sur le grand axe comme dia-

mètre, après qu'on a relevé ce cercle en le faisant tourner autour de AA′ d'un angle α tel que $\cos\alpha = \frac{b}{a}$; le point T où elle rencontre AA′ est à lui-même sa projection. Dès lors, pour avoir la tangente en M à l'ellipse, il suffit de mener la

Fig. 16.



tangente en D au cercle, et de joindre M au point T où cette tangente coupe AA′.

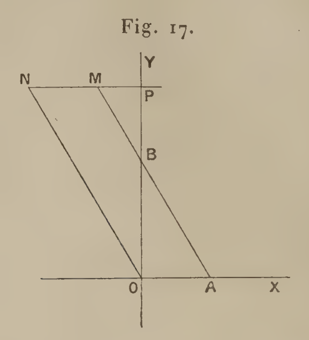
On pourrait également joindre M au point S, où la tangente en C au plus petit des deux cercles rencontre le diamètre BB′ prolongé.

74. **Premier exemple.** — *Une droite de longueur constante glisse par ses deux extrémités sur deux droites rectangulaires* OX, OY, *situées dans un même plan : trouver le lieu décrit par un point quelconque de cette droite.*

Supposons d'abord que le point générateur M détermine sur la droite mobile AB des segments soustractifs. Soit AB une position quelconque de la droite. Menons par O une droite ON égale et parallèle à AM (*fig.* 17). Alors ON conserve une longueur constante, et le lieu décrit par N pendant le déplacement de AB est une circonférence ayant pour

centre O et pour rayon AM. Soit P le point où la droite NM prolongée rencontre OY; elle lui est perpendiculaire, comme

Fig. 17.

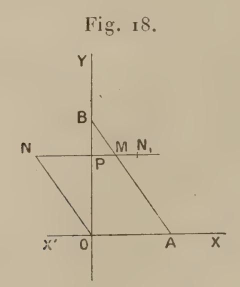


parallèle à OA. La similitude des triangles BMP, ONP (*fig.* 18) donne alors

$$\frac{MP}{NP} = \frac{MB}{AM} = \text{const.} < 1.$$

Donc le lieu de M est obtenu en diminuant dans un rapport constant toutes les ordonnées du cercle relatives au diamètre YY′ : c'est une ellipse dont le centre est en O; le

Fig. 18.



demi grand axe, suivant OY, est égal à $ON = AM$, et le demi petit axe $AM \times \frac{BM}{AM} = BM$ est dirigé sur OX.

Supposons maintenant que M détermine sur AB des seg-

ments additifs. Menant encore ON égal et parallèle à AM, le lieu de N est une circonférence ayant O pour centre et AM pour rayon, et l'on a comme précédemment

$$\frac{MP}{NP} = \frac{MB}{MA} = \text{const.} < 1.$$

Si l'on considère le point N_1 symétrique de N par rapport à OY, il appartient aussi à la circonférence lieu de N, et l'égalité précédente équivaut à

$$\frac{MP}{N_1P} = \frac{MB}{MA} = \text{const.} < 1,$$

prouvant que le lieu est encore une ellipse ayant un axe suivant Y'Y égal à 2 AM, l'autre suivant X'X et égal à 2 BM.

Dans tous les cas, le lieu est une ellipse ayant ses axes sur les côtés de l'angle donné.

Cas limites. — 1° Le milieu de AB décrit une circonférence ayant O pour centre, car $\frac{MP}{NP} = 1$ et M coïncide toujours avec N_1. Cette conclusion est d'ailleurs évidente *a priori*, car, dans le triangle rectangle OAB, la médiane OM, égale à la moitié de l'hypoténuse, est constante.

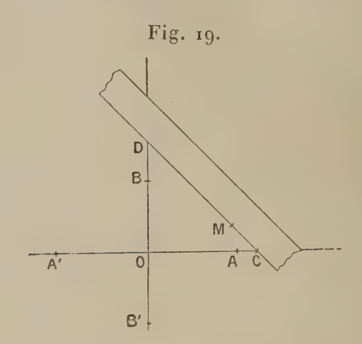
Le milieu de AB est d'ailleurs le seul point qui décrive une circonférence, puisque, dans tous les cas, les demi-axes de l'ellipse décrite ont pour longueurs AM et BM; ils ne peuvent être égaux que si M est milieu de AB (*fig.* 19).

2° Les extrémités A et B du segment AB de la droite mobile décrivent des segments de droites, égaux à 2 AB, dirigés sur les côtés de l'angle et ayant leur milieu pour chacune en O. Ils sont les seuls points de la droite décrivant des portions de droite. Car pour que l'ellipse décrite se réduise à une droite, il faut et il suffit que l'un des demi-axes soit nul, ce qui exige que l'on ait AM = 0 ou MB = 0, c'est-à-dire que M coïncide avec A ou B.

75. Application. — *Construire une ellipse par points connaissant les axes en grandeur et en direction, par le* procédé de la bande de papier.

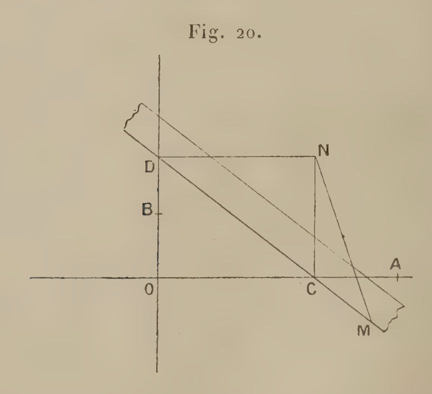
Sur le bord d'une bande de papier, on porte à la suite l'une de l'autre la longueur $CM = b$ du demi petit axe, puis la

Fig. 19.



longueur $MD = a$ du demi grand axe. Les trois points C, M, D (*fig.* 20) étant ainsi marqués, on fait glisser les points C

Fig. 20.



et D sur les directions des deux axes, C étant sur celle du grand axe; le point M décrit l'ellipse : il suffit de marquer, avec la pointe du crayon, sur la feuille de dessin, diverses

positions successives occupées par M et de les joindre par un trait continu.

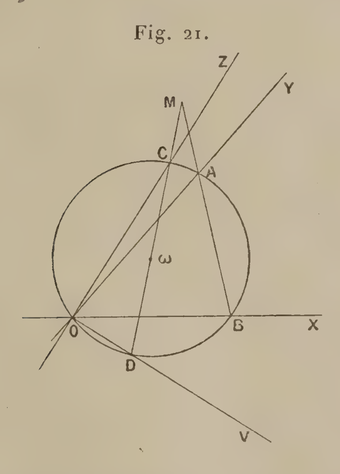
On pourrait encore porter le demi petit axe de C en M et puis le demi grand axe de M en D dans le sens MC, de manière que la distance CD soit égale à $a - b$. La bande, plus courte, est alors plus maniable.

La normale en un point quelconque M de cette ellipse s'obtient aisément par la considération du centre instantané de rotation, lequel n'est autre que le point de concours N des normales en C, D aux axes qui sont les trajectoires des points C, D de la figure mobile : NM est la normale en M.

76. **Première généralisation.** — Le lieu est encore une ellipse quand l'angle XOY (*fig.* 21) n'est pas droit.

Considérons en effet le cercle circonscrit au triangle OAB,

Fig. 21.



pour une position quelconque de AB; son rayon demeure invariable, celui du segment capable de l'angle $XOY = \theta$ décrit sur AB comme corde. Ce rayon est égal à $\frac{AB}{2\sin\theta}$.

Si nous imaginons ce cercle invariablement lié à la droite

et entraîné avec elle de manière que son plan glisse sur celui de l'angle, il passera toujours par O, puisque de O on verra toujours AB sous un angle égal à XOY ou à son supplément.

Menons le diamètre CD passant par le point générateur M. Ses extrémités C, D entraînées avec le cercle seront invariables sur la circonférence, mais glisseront sur le plan fixe, de manière que, les arcs CA, DB demeurant invariables, il en sera de même des angles inscrits $\widehat{COA}$, $\widehat{DOB}$. Par suite, les points C, D décrivent eux-mêmes des droites fixes OZ, OV rectangulaires puisque CD est diamètre. M est donc un point d'une droite MCD dont un segment CD, de longueur constante, glisse par ses deux extrémités sur deux droites rectangulaires fixes OZ, OV; il décrit une ellipse ayant ses axes dirigés suivant OZ, OV et leurs demi-longueurs sont DM pour l'axe dirigé suivant OZ, CM pour l'autre.

77. Variétés. — 1° Le lieu ne peut jamais être un cercle quand l'angle XOY n'est pas droit. Il faudrait en effet que l'on eût DM = CM, c'est-à-dire que M fût au milieu du diamètre CD, au centre ω; mais alors AB serait elle-même un diamètre, ce qui exige que l'angle XOY soit droit.

2° Il ne peut être une droite que si M coïncide avec A ou B. En effet, pour qu'un des axes de l'ellipse décrite soit nul, il faut que l'on ait CM = 0 ou DM = 0. Mais alors M est à la fois sur AB et sur la circonférence, donc en A ou B.

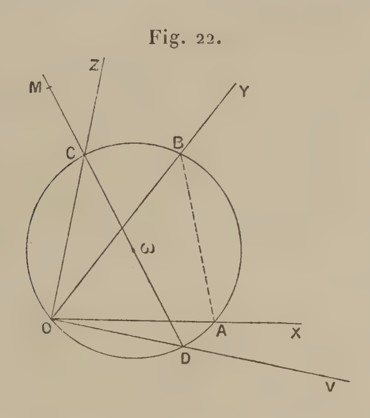
Remarque. — La démonstration subsiste quelque petit que soit l'angle XOY, mais non s'il est nul, c'est-à-dire si les droites fixes sont parallèles, le cercle circonscrit au triangle étant alors infini. Il est évident *a priori* que, dans ce cas, le lieu est une droite parallèle aux deux droites X, Y.

78. **Deuxième généralisation.** — *Un plan mobile* P *glisse*

sur un plan fixe Q *de manière que deux de ses points* A, B *parcourent deux droites* OX, OY *concourantes, tracées dans le plan fixe : trouver le lieu décrit par un point quelconque du plan mobile.*

Le cercle circonscrit au triangle AOB conserve, dans le plan mobile, une grandeur constante. Si l'on mène le diamètre CD passant par le point générateur M, le raisonnement précédent montre que M est un point d'une droite dont un

Fig. 22.



segment CD, de longueur constante, glisse par ses deux extrémités sur deux droites rectangulaires fixes OZ, OV (*fig.* 22), d'où :

1° Tout point du plan mobile décrit une ellipse dont les demi-axes, dirigés suivant OZ et OV, ont pour longueurs DM et CM;

2° Le centre ω du cercle circonscrit au triangle AOB, et lui seul, décrit une circonférence, laquelle a pour centre O et même rayon que le cercle ω.

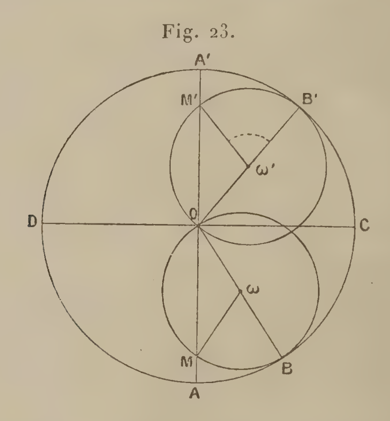
3° Les points de la circonférence ω, et eux seuls, décrivent des portions de droite passant par O, lequel est le milieu de chacune d'elles, et leur longueur commune est double du diamètre du cercle ω.

Remarque. — Si les deux droites données x, y étaient parallèles, tout point du plan mobile décrirait une droite indéfinie parallèle aux deux premières.

79. **Autre interprétation de ces résultats.** — Lemme (théorème de Lahire). — *Si une circonférence roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence fixe de rayon double, tout point de la circonférence mobile décrit un diamètre de la circonférence fixe.*

Prenons comme position initiale de la circonférence mobile celle pour laquelle le point générateur coïncide avec le point de contact A des deux circonférences. Quand le point de contact est en B (*fig.* 23), le point générateur est venu en M, tel

Fig. 23.



que l'arc MB soit égal à l'arc AB. Supposons l'angle AOB aigu; si ωM est le rayon du cercle mobile, l'angle BωM est extérieur au triangle isoscèle OωM; donc

$$(1) \qquad \widehat{B\omega M} = 2\,\widehat{BOM}.$$

D'un autre côté,

$$\frac{\text{arc MB}}{\omega M} = 2\,\frac{\text{arc AB}}{OA};$$

par suite

$$\widehat{B\omega M} = 2\widehat{BOA}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) on conclut $\widehat{BOM} = \widehat{BOA}$: donc, pendant que le point de contact B décrit le quadrant AC, le point M parcourt le rayon AO.

Supposons maintenant que B soit venu en B′, sur le deuxième quadrant.

L'angle $B'\omega'M'$ supérieur à 2 droits est le double de l'angle obtus $B\omega A$; or cet angle supérieur à 2 droits vaut 4 droits moins l'angle $B'\omega'M'$ inférieur à 2 droits. On a donc l'égalité

$$4 \text{ droits} - \widehat{B'\omega'M'} = 2\widehat{B'OA},$$

ou, en observant que B′OA est le supplément de B′OA′ (A′ est l'extrémité du diamètre passant par A),

$$4 \text{ droits} - B'\omega'M' = 2(2 \text{ droits} - B'OA')$$

d'où

$$B'\omega'M' = 2B'OA'.$$

D'ailleurs $B'\omega'M'$ étant extérieur au triangle isoscèle $O\omega'M'$, on a aussi

$$\widehat{B'\omega'M'} = 2\widehat{B'OM'}.$$

Par suite

$$\widehat{B'OM'} = B'OA',$$

et le point M′ parcourt le rayon OA′.

Le lieu complet est donc le diamètre AA′; il est parcouru en entier, de A vers A′ quand le point de contact décrit la demi-circonférence ACA′, puis une seconde fois, en sens inverse, quand le point de contact décrit la demi-circonférence A′DA.

80. Théorème. — *Étant données : 1° Dans un plan*

mobile P *une circonférence* ω ; 2° *dans un plan fixe* Q *une circonférence* O *de rayon double, si le premier plan glisse sur le second de manière que la circonférence* ω *roule sans glissement à l'intérieur de la circonférence* O, *tout point* M *du plan mobile décrit une ellipse.*

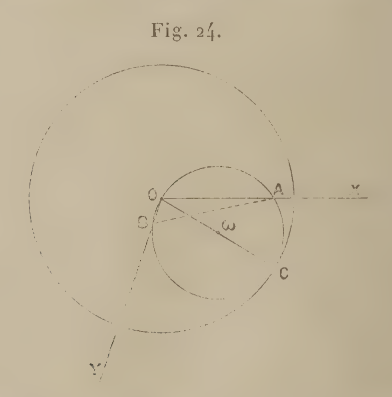
Si en effet on joint le point M au centre mobile ω, cette droite perce la circonférence mobile en deux points C, D qui décrivent deux diamètres rectangulaires du cercle fixe. Dès lors M décrit une ellipse.

81. Variétés. — 1° Le point ω, centre du cercle mobile, et lui seul, décrit une circonférence, laquelle a pour centre le point O, centre du cercle fixe, et même rayon que le cercle mobile.

2° Tout point de la circonférence mobile (et ceux-là seulement) décrit un segment de droite, qui est un diamètre de la circonférence fixe.

82. *Remarque.* — Lorsqu'un plan mobile P glisse sur un plan fixe Q de manière que deux de ses points A et B décri-

Fig. 24.



vent deux droites concourantes OX, OY de ce dernier, il existe toujours dans le plan mobile un cercle qui roule sans

glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon double appartenant au plan fixe.

En effet, considérons le cercle circonscrit au triangle AOB, et soit ω le centre (*fig.* 24). Si l'on mène son diamètre $O\omega C$ passant par O, il rencontre la circonférence de rayon double décrite de O comme centre au point C, et les deux cercles sont tangents en C. Or le cercle ω conserve une grandeur constante dans le plan mobile, et dans chacune de ses positions il est tangent intérieurement au cercle de rayon double décrit dans le plan fixe; enfin il roule sans glissement, car, si on lui imprime ce mouvement, les points A et B se déplacent sur OX et OY, et le mouvement du plan mobile est exactement celui qui est défini par l'énoncé.

On pourrait donc interpréter les résultats trouvés précédemment par cette considération du cercle tracé dans le plan fixe et roulant à l'intérieur d'un autre cercle tracé dans le plan mobile.

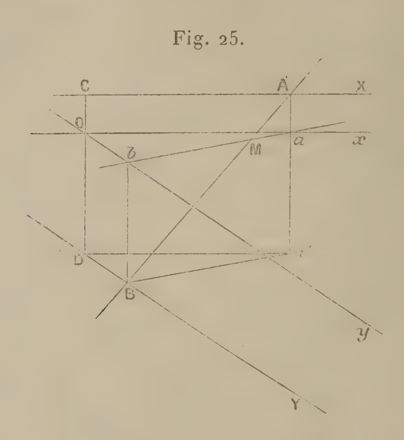
83. **Troisième généralisation. — Extension à la Géométrie dans l'espace.** — Si une droite se déplace de manière qu'un segment AB de longueur constante s'appuie constamment par ses deux extrémités A et B sur deux droites non situées dans un même plan, tout point M de cette droite décrit une ellipse dont le plan est parallèle aux deux droites données.

1° Le lieu est plan : Si par les deux droites on fait passer un système de deux plans parallèles P, Q, le point M appartient constamment au lieu des points divisant dans un rapport constant $\frac{AM}{BM}$ toutes les droites limitées s'appuyant sur les plans P, Q par leurs extrémités. Ce lieu est un plan R parallèle à P et Q. Il divise la perpendiculaire commune CD aux deux droites dans le rapport $\frac{CO}{OD} = \frac{AM}{MB}$.

2° Pour étudier le lieu dans ce plan, projetons sur le plan R les droites données X, Y et chaque position de AB; nous

obtenons deux droites concourantes x, y, parallèles à X, Y (*fig.* 25), leur point de concours O étant le point où la perpendiculaire commune CD rencontre le plan R, puis une droite ab dont le segment ab, limité à x et y, a une longueur constante ; cette projection ab est, en effet, égale à la projection Ba' du segment AB sur le plan Q parallèle à R ; or cette dernière est un côté de l'angle droit du triangle rectangle ABa'

Fig. 25.



dont l'hypoténuse AB demeure constante, ainsi que l'autre côté de l'angle droit Aa' égal à la perpendiculaire commune CD.

Cela posé, le point générateur M, situé dans le plan de projection R, est à lui-même sa projection ; il est donc à l'intersection de AB et ab. Dès lors c'est un point d'une droite ab dont un segment de longueur constante glisse sur les deux droites concourantes Ox, Oy ; il décrit une ellipse, dont les axes s'obtiendront facilement à l'aide du cercle circonscrit au triangle Oab et du diamètre passant par M.

84. Variétés. — 1° Le lieu ne peut être une circonférence que dans le cas particulier où les deux droites x, y et, par suite, en même temps, les droites X, Y sont rectangulaires,

et que M est le milieu de AB. Cette circonférence a pour centre le point O, milieu de la perpendiculaire commune CD.

2° Les seuls points de la droite indéfinie AB qui décrivent des droites sont A et B, car, pour que M décrive une droite, il faut qu'il soit sur x ou y. Ces points décrivent des segments de droites situés sur X, Y, ayant leurs milieux en C, D et pour longueur $2ab$.

85. **Deuxième exemple.** — *Lieu des points d'un plan tels que la somme des carrés des distances de chacun à deux droites fixes concourantes de ce plan ait une valeur donnée k.*

Premier cas. — Si les deux droites sont rectangulaires, le lieu est une circonférence de rayon k, ayant pour centre le point de concours des deux droites.

Deuxième cas. — Les deux droites ne sont pas rectangulaires.

Des quatre angles qu'elles forment, deux opposés par le sommet sont obtus. Soit 2α leur valeur commune.

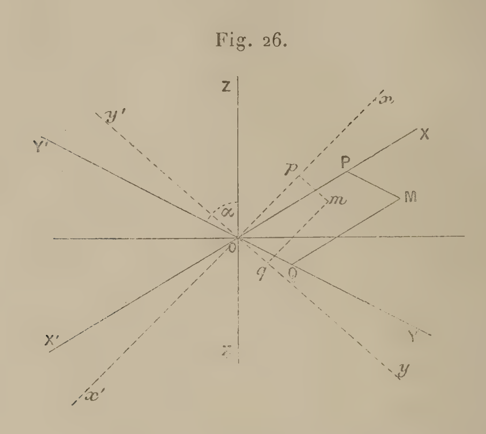
Supposons d'abord qu'à la véritable distance d'un point du lieu à chacune, mesurée au moyen de la perpendiculaire menée à cette droite, on substitue une distance oblique mesurée par la longueur d'une parallèle menée à l'autre côté.

Les bissectrices des quatre angles formés par les deux droites sont deux axes de symétrie du lieu.

Concevons que l'on fasse tourner toute la figure autour de la bissectrice zz' de l'angle obtus 2α (*fig.* 26). La projection de cet angle obtus sur le plan primitif, d'abord égale à 2α, ira toujours en diminuant, d'une manière continue, jusqu'à zéro, valeur qu'elle obtiendra quand le plan aura tourné de 90°. Il y a donc une position de ce plan mobile, et une seule, pour laquelle la projection est un angle droit. Soient alors xx', yy'

les projections des deux droites données XX', YY'. Cela posé, M étant un point du lieu, ses distances MP, MQ aux deux droites, distances comptées parallèlement à OY et OX, se projetteront suivant les perpendiculaires mp, mq aux pro-

Fig. 26.



jections Ox, Oy de ces deux droites. Je dis maintenant que la somme $\overline{mp}^2 + \overline{mq}^2$ de leurs carrés est constante.

En effet, les deux droites MP, MQ, également inclinées sur la bissectrice zz', c'est-à-dire sur l'intersection du plan donné avec le plan de projection, font avec celui-ci un même angle β qui ne varie pas avec la position de M, car il est constamment égal à l'inclinaison des droites OX, OY sur le plan. On a dès lors

$$mp = \text{MP}\cos\beta,$$
$$mq = \text{MQ}\cos\beta,$$

d'où

$$\overline{mp}^2 + \overline{mq}^2 = \left(\overline{\text{MP}}^2 + \overline{\text{MQ}}^2\right)\cos^2\beta = k^2\cos^2\beta,$$

quantité constante.

Le lieu de m, d'après le premier cas, est donc une circonférence décrite de O comme centre, avec un rayon égal à $k\cos\beta$; par suite, le lieu demandé est une ellipse, section

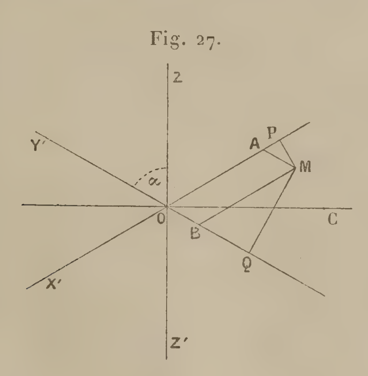
faite par le plan YOX dans le cylindre de révolution ayant pour base la circonférence lieu de m.

Les axes de cette ellipse s'obtiennent aisément : le petit axe, dirigé suivant ZZ', est égal au diamètre du cylindre. On peut le construire graphiquement par les procédés de la Géométrie descriptive en choisissant pour plan horizontal le plan de projection, prenant la ligne de terre perpendiculaire à ZZ', et déterminant la trace verticale du plan XOY par cette condition que l'angle $ZOX = \alpha$ doit se projeter horizontalement en un angle de 45°. La projection d'un point de ce plan déterminé par la condition $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = k^2$ donnera un point de la base du cylindre, que l'on pourra dès lors construire, ainsi que les axes de l'ellipse déterminée par le plan XOY perpendiculaire au plan vertical.

On pourrait encore déterminer par le calcul l'angle dont il faut faire tourner le plan XOY et, par suite, l'angle β.

Troisième cas. — Supposons enfin que, les droites OX, OY n'étant pas rectangulaires, les distances d'un point M

Fig. 27.



du lieu aux côtés se mesurent par les perpendiculaires MP, MQ menées à ces côtés. Soient MA, MB les distances comptées parallèlement aux côtés (*fig.* 27).

On a, par hypothèse,

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = k^2.$$

Or

$$MP = MA \sin \widehat{MAP} = MA \sin 2\alpha,$$
$$MQ = MB \sin MBQ = MB \sin 2\alpha,$$

d'où

$$k^2 = \left(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2\right) \sin^2 2\alpha,$$

et, par suite,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \frac{k^2}{\sin^2 2\alpha} = \text{const.}$$

Nous sommes ramené au cas précédent : le lieu est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les bissectrices des angles que forment les deux droites, le petit axe sur la bissectrice de l'angle obtus. Sa longueur est $\frac{K \cos \beta}{\sin 2\alpha}$, β ayant la même signification que précédemment.

L'extrémité c du grand axe peut se construire directement en remarquant que, ses distances aux deux droites étant égales, si leur valeur commune est désignée par d, on a, d'après l'énoncé, $2d^2 = k^2$, d'où $d = \frac{K\sqrt{2}}{2}$. Cette longueur étant construite, on mènera une parallèle à OX à cette distance; elle déterminera c par son intersection avec la bissectrice de l'angle aigu. Cette méthode s'applique également au deuxième cas.

Remarque. — La méthode des projections donne le moyen de déduire certaines propriétés des figures planes de propriétés correspondantes appartenant aux figures dans l'espace. On en rencontre d'ailleurs des exemples dans le cours. Ainsi, du théorème de Dandelin, relatif aux sections planes du cône de révolution, on déduit aisément les propriétés des foyers et directrices dans l'ellipse, la parabole et l'hyperbole.

Pareillement, toute épure simple de Géométrie descriptive peut conduire à des propriétés relatives aux figures planes,

en étudiant la correspondance entre les deux projections de chaque point, sans se préoccuper des figures de l'espace qu'on a représentées.

EXEMPLES DE LIEUX DANS L'ESPACE.

86. **Le lieu peut être une surface.** — Si l'on ne peut le ramener immédiatement à une définition connue, il est avantageux souvent de commencer par étudier la section faite par un plan convenablement choisi.

Ce qui précède, surtout dans l'énumération des lieux géométriques tirés du cours, en contient des exemples sur les surfaces de révolution, tellement immédiats que nous avons pu énoncer les conclusions sans développer le raisonnement. Tel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux sphères données, ou d'un point et d'un plan, etc.

87. Quand le lieu est une ligne, on l'obtient le plus souvent comme intersection de deux surfaces.

Exemple. — *Trouver le lieu des centres des sphères de rayon donné* R *passant par un point donné* A *et tangentes à deux sphères données.*

1° Le centre est à une distance connue R du point A : d'où un premier lieu qui est la sphère de rayon R décrite de A comme centre.

2° Devant être à égale distance des sphères de centres B, C, il appartient à un ensemble d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes à deux nappes de révolution ayant pour foyers B, C.

Le lieu est donc l'ensemble des courbes d'intersection de ces dernières surfaces avec la sphère qui a pour centre le point A.

88. Si le lieu est plan, cette méthode générale trouve son

application, le plan du lieu étant l'une des deux surfaces, si on peut le déterminer *a priori*. Souvent alors des considérations de symétrie permettent de ramener la recherche du lieu à une question de Géométrie plane.

89. Exemple. — *Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution admettant comme section plane une conique donnée.*

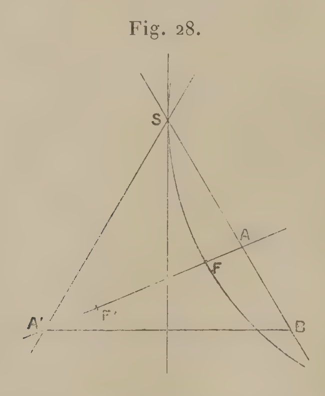
Soit S le sommet d'un de ces cônes. On sait (théorème de Dandelin) que le plan mené par l'axe du cône perpendiculairement au plan de la conique coupe ce dernier suivant l'axe focal de la conique. Donc, inversement, tout point du lieu est dans le plan mené par l'axe focal de la conique donnée perpendiculairement au plan de cette conique.

Pour trouver le lieu dans ce plan, nous distinguerons trois cas, suivant le genre de la conique donnée.

Premier cas. — La conique donnée est une ellipse.

Le plan mené par le grand axe AA′ perpendiculairement

Fig. 28.



au plan de l'ellipse coupe le cône suivant deux génératrices SA, SA′ (*fig.* 28).

On sait que, si par A′ on mène dans ce plan une droite A′B

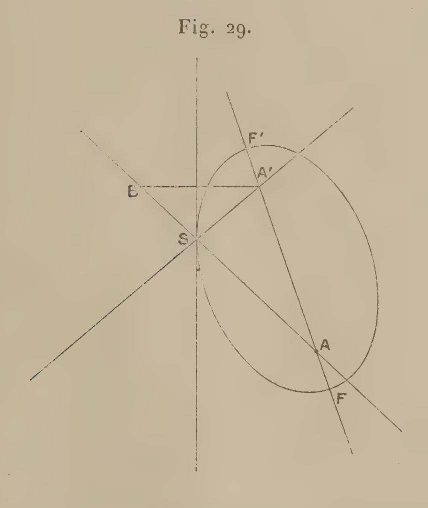
perpendiculaire à l'axe du cône, on a $AB = 2c$, distance des deux foyers de l'ellipse. Dès lors $SB - SA = 2c$, quantité constante, indépendante de la position particulière du point S sur le lieu cherché. Or $SB = SA'$; donc l'égalité précédente équivaut à $SA' - SA = 2c$. Et comme A' et A sont deux points fixes, la propriété caractéristique d'un point du lieu est que la différence de ses distances à deux points fixes A, A' ait une valeur constante $2c$.

Le lieu est une hyperbole ayant pour foyers les sommets A, A' de l'ellipse donnée, et pour sommets ses foyers F, F', puisque l'axe transverse $2c = FF'$.

Remarque. — L'axe du cône correspondant à un point S de cette hyperbole pris pour sommet n'est autre que la tangente à l'hyperbole en ce point, car il doit être la bissectrice de l'angle ASA' des rayons vecteurs.

Deuxième cas. — La conique donnée est une hyperbole.

Fig. 29.



Le même raisonnement prouve que le lieu est une ellipse

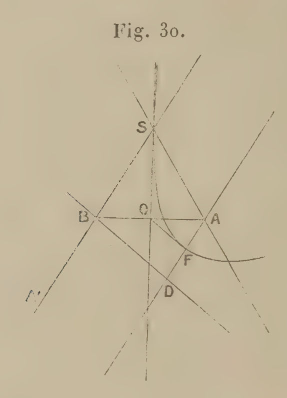
ayant pour sommets et foyers les foyers et sommets de l'hyperbole donnée.

Pour une position du sommet S sur cette ellipse, l'axe du cône est la tangente à l'ellipse en ce point (*fig.* 29).

Troisième cas. — La conique est une parabole.

Si par le sommet A de la courbe, on mène, dans le plan ASA′ (*fig.* 30), une perpendiculaire AB à l'axe du cône rencontrant SA′ en B, on a SA = SB. Or le foyer F de la parabole est le point de contact de la sphère inscrite au cône et tan-

Fig. 30.



gente au plan de la parabole. Le centre O de cette sphère est le milieu de AB, puisque cette droite est bissectrice de l'angle SAF et que l'axe du cône est la bissectrice de l'angle ASA′. Donc la perpendiculaire BD aux deux parallèles SB, AF passe par un point fixe D, tel que AD = 2 AF. Elle est donc fixe elle-même, coïncidant toujours, quelle que soit la position de S, avec la perpendiculaire à l'axe AF de la parabole menée par D.

L'égalité SA = SB montre dès lors que tout point S du lieu a pour caractère d'être également distant du point fixe A et de la droite fixe BD. Le lieu est une parabole ayant pour foyer et sommet le sommet et le foyer de la parabole donnée.

Pour une position de S sur cette parabole, l'axe du cône est encore la tangente en S à la parabole.

90. Deuxième exemple. — Par des considérations du même genre, on démontre ce qui suit :

Un cône de révolution étant coupé par un plan, si l'on fait tourner ce plan autour de la tangente en un sommet A *de la section situé sur l'axe focal, le lieu des foyers de toutes les coniques déterminées sur le cône par toutes les positions du plan sécant est une strophoïde oblique* [1].

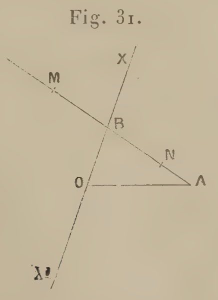
Démonstration. — On voit aisément que le plan déterminé par l'axe du cône et le sommet fixe A contient le lieu demandé.

Soit maintenant A′ le deuxième sommet de la section ; si, par A et A′ on mène, dans le plan ASA′ (*fig.* 32) des perpen-

[1] C'est-à-dire une courbe répondant à cette définition :

Étant donnés une droite indéfinie XX′, un point O sur cette droite et un point extérieur A (*fig.* 31), si par A on mène une droite variable rencon-

Fig. 31.



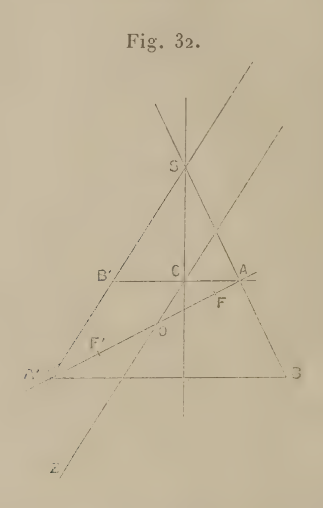
trant XX′ en B, puis qu'à partir de B on porte sur AB, de part et d'autre de B, des longueurs égales à BO, le lieu décrit par les points M, N ainsi obtenus est une strophoïde.

La strophoïde est dite droite dans le cas particulier où O est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur XX′, oblique dans les autres cas.

diculaires à l'axe du cône, coupant en B′ et B les génératrices SA′ et SA, on a $B'A' = AB = FF'$, distance des deux foyers de la conique.

Cela posé, le centre O est le milieu de AA′. Or, quand on fait tourner le plan sécant, le point A′ décrit la génératrice SA′; donc O décrit la parallèle CZ à SA′ menée par C

Fig. 32.



milieu de AB′. Les triangles AB′A′, ACO étant semblables, on en déduit $CO = \frac{A'B'}{2} = OF = OF'$.

Dès lors les points F, F′ du lieu, situés sur une transversale AA′ issue du point fixe A, peuvent s'obtenir en portant, de part et d'autre de son intersection O avec CZ, des longueurs égales à la distance OC du point O au point fixe C de cette droite; le lieu est une strophoïde.

La démonstration s'applique au cylindre de révolution; mais alors OC est l'axe du cylindre, et la strophoïde est droite.

CHAPITRE V.

APPLICATION DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES A LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES GRAPHIQUES.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

91. Par problèmes graphiques on entend l'ensemble des constructions géométriques répondant à un problème déterminé, et pouvant s'effectuer avec la règle et le compas.

Le problème est dit *déterminé* quand il admet un nombre limité de solutions.

Dans les problèmes graphiques, nous n'avons à considérer que trois espèces de figures élémentaires : le *point,* la *ligne droite* et la *circonférence.*

La ligne droite se détermine en général par deux points, dont l'un peut être rejeté à l'infini; la circonférence par son centre et son rayon, ou, ce qui revient au même, par son centre et un point de la circonférence; en sorte que la résolution d'un problème graphique peut toujours se ramener à la détermination d'un certain nombre de points. Le choix de ces points aura souvent une grande influence sur la simplicité de la solution.

La méthode la plus générale, pour déterminer graphiquement un point, consiste à le considérer comme intersection de deux lieux géométriques que l'on peut obtenir de la manière suivante : On sait qu'il faut deux conditions pour déterminer un point. Supposons d'abord qu'elles soient toutes les deux indiquées explicitement dans l'énoncé; si l'on considère une seule de ces conditions, en négligeant

l'autre, à cette condition unique correspondent une infinité de positions du point, constituant un premier lieu géométrique auquel il doit appartenir; en faisant au contraire abstraction de la première condition, et tenant compte de la seconde seule, on a un deuxième lieu. Tous les points satisfaisant aux deux conditions à la fois doivent être sur les deux lieux géométriques; ils sont leurs points communs.

Ces points peuvent être ainsi construits graphiquement si les deux lieux sont des droites, des circonférences, ou bien l'un une droite, l'autre une circonférence. On le pourra encore toutes les fois que, les deux lieux ne rentrant pas dans l'une de ces trois combinaisons, la recherche de leurs points communs peut se ramener, par des transformations convenables, à l'une de ces combinaisons, ou à un problème graphique connu, par exemple si l'un des lieux est une droite, et l'autre une conique.

Si ces deux conditions ne sont pas explicitement données dans l'énoncé, on devra choisir deux conditions caractéristiques et appliquer ce qui précède; mais la simplicité de la solution dépendra des conditions choisies.

Cette méthode est appliquée presque exclusivement, dans les Cours de Géométrie, pour les problèmes du deuxième Livre. Nous allons le montrer sur deux d'entre eux.

92. Premier exemple tiré du cours. — *Par un point pris sur une droite mener une deuxième droite faisant avec la première un angle égal à un angle donné.*

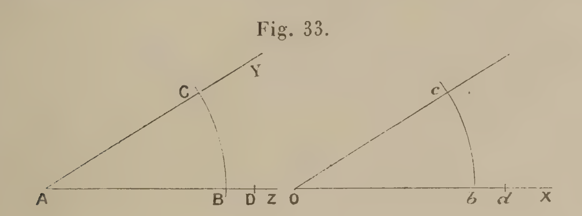
Soient O le point donné sur une droite OX, et YAZ l'angle donné (*fig.* 33). On connaît déjà un point O de la droite demandée, il suffit d'en trouver un second c. Les deux conditions auxquelles ce point c doivent satisfaire ne sont pas données explicitement dans l'énoncé; aussi pourrait-on résoudre le problème d'une infinité de manières diffé-

rentes, mais ne présentant pas le même degré de simplicité.

La solution la plus simple consiste à trouver le point *c* de la droite inconnue qui se trouve à une distance arbitrairement choisie AC du point O. Le premier lieu est donc une circonférence décrite de O comme centre avec un rayon égal à AC.

Pour le deuxième lieu, après avoir déterminé les points B et *b* où les deux circonférences décrites avec ce même rayon, de A et O comme centres, rencontrent les droites AZ et OX, on remarque que la corde *bc* doit être égale à BC, d'où un

Fig. 33.



deuxième lieu qui est la circonférence décrite de *b* comme centre avec BC pour rayon. Nous retrouvons ainsi la solution donnée dans tous les cours.

Au deuxième lieu on aurait pu en substituer un autre, également très simple, en prenant un point quelconque D sur le côté AB, mesurant la distance DC, puis prenant sur OX un point *d* tel que $od = AD$, et décrivant de *d* comme centre, avec DC comme rayon, un arc de cercle qui, par son intersection avec le premier lieu, déterminerait *c*. Maglré sa simplicité, cette méthode est moins simple que la première, parce qu'elle exige en plus la détermination du point *d*.

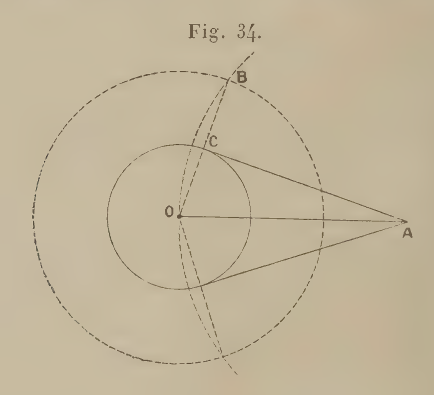
On pourrait encore déterminer le point *c* sur le premier lieu par sa distance au côté OX. Pour cela, de C on abaisserait la perpendiculaire CE sur AZ, puis on mènerait une parallèle à OX qui en fût à une distance égale à CE; on aurait un deuxième lieu contenant le point C.

D'une manière générale, ayant choisi arbitrairement un point C sur AY, on pourrait déterminer celui qui lui correspond sur la figure à construire par deux conditions choisies de telle manière que, si l'on transporte la deuxième figure sur la première après avoir effectué toutes les constructions indiquées par ces conditions, en ayant soin d'appliquer OX sur AZ, et O en A, *c* vienne sur C.

93. Deuxième exemple tiré du cours. — *Mener par un point donné* A *une tangente à une circonférence donnée* (*fig*. 34).

Le point choisi pour déterminer la tangente est le point de contact. 1° Il doit être sur la circonférence donnée, qui constitue le premier lieu. 2° On démontre qu'il doit appartenir à l'arc du segment capable d'un angle droit décrit sur la droite AO qui joint le centre au point donné, c'est-à-dire à la circonférence ayant pour diamètre AO : cette circonférence constitue le deuxième lieu.

Fig. 34.



Ici encore les conditions ne sont pas explicitement données dans l'énoncé. On pourrait donc imaginer une infinité de constructions graphiques, mais moins simples que celle

du cours, en choisissant un autre point de la tangente ou dépendant de la tangente, ou en déterminant la position du point de contact par d'autres considérations.

Par exemple, la théorie de l'ellipse appliquée au cercle conduit à une solution assez simple consistant à déterminer tout d'abord le symétrique B du centre par rapport à la tangente demandée. Or ce point B est le symétrique du centre O par rapport au point de contact C, donc $OB = 2R$, R désignant le rayon de la circonférence donnée. D'où un premier lieu contenant le point B, la circonférence ayant même centre que la circonférence donnée et un rayon double.

En outre, les longueurs AB, AO sont égales entre elles, d'où un deuxième lieu qui est la circonférence décrite de A comme centre avec AO pour rayon.

Connaissant le point B on aura la tangente soit en menant de A une perpendiculaire à la droite OB, soit en déterminant le point de contact C par l'intersection de OB avec la circonférence donnée.

94. Remarque. — Les considérations précédentes s'appliquent aux figures qui sont complètement déterminées quand on a trouvé un point unique convenablement choisi; en d'autres termes, lorsque deux conditions suffisent pour que le problème soit déterminé, conditions comprises soit implicitement, soit explicitement dans l'énoncé.

Pour une figure plus compliquée, la méthode des lieux géométriques peut s'appliquer à la détermination de chacun des points nécessaires à la construction de la figure. Dans ce cas, le nombre des conditions contenues dans l'énoncé est supérieur à deux. Si l'on néglige une de ces conditions, il y a une infinité de figures satisfaisant aux conditions conservées; et si l'on suit toutes les positions d'un point particulier dans les figures successives ainsi obtenues, elles forment un lieu géométrique sur lequel doit être ce point, dans la figure

demandée. Reprenant alors toutes les conditions données, on en néglige une autre, mais en tenant compte de la première; on a ainsi un nouveau lieu devant contenir le même point, et qui, par son intersection avec le premier, détermine la position du point cherché.

On peut ainsi trouver autant de lieux contenant le point qu'il y a de conditions distinctes dans l'énoncé, et, en les combinant deux à deux, obtenir des solutions différentes. Par exemple, si le nombre des conditions est n, on aura n lieux distincts, conduisant à un nombre de solutions égal à $\frac{n(n-1)}{2}$. Si, en outre, m points sont nécessaires pour que la figure puisse être construite, la même conclusion s'appliquant à chacun de ces points, on peut être conduit, par ces considérations, à un nombre de solutions égal à $m\frac{n(n-1)}{2}$.

La simplicité de chaque solution dépendra d'abord du choix des points caractéristiques, s'ils ne sont pas indiqués d'avance, puis, pour chaque point, du choix des conditions négligées pour la détermination des deux lieux géométriques devant le déterminer.

Nous allons appliquer ces considérations à un certain nombre de problèmes graphiques ne rentrant pas dans le cours.

PREMIER EXEMPLE.

95. *Inscrire dans un triangle* ABC *un rectangle de périmètre donné, deux sommets devant être sur le côté* BC (*fig.* 35).

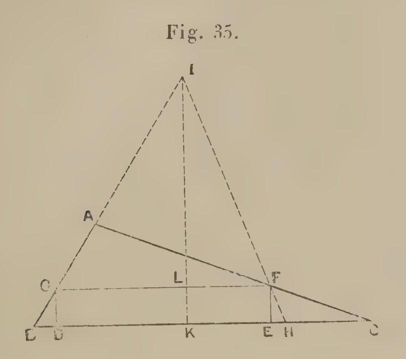
Supposons le problème résolu. Soit DEFG le rectangle demandé. Il suffit de connaître le sommet F, par exemple, pour construire le rectangle.

1° Tenant compte de cette seule condition qu'il est sur le

côté AC, nous avons la droite AC elle-même comme premier lieu.

2° Faisons abstraction au contraire de cette condition pour tenir compte seulement du périmètre donné, que nous désignerons par $2p$: nous avons à chercher le lieu du quatrième

Fig. 35.



sommet F d'un rectangle de périmètre égal à $2p$, qui a deux sommets DE sur le côté BC d'un angle CBA, et un troisième sommet G sur le second côté du même angle. Or le demi-périmètre p est égal à GD + GF, d'où ce nouvel énoncé :

Trouver le lieu obtenu en menant par un point variable G *d'une droite* BA *une perpendiculaire* GD *au côté* BC, *puis une parallèle au même côté, et prenant sur cette parallèle une longueur* GF *telle que la somme* GD + GF *ait une valeur donnée* p.

Nous obtenons deux points remarquables H, I du lieu en prenant sur BC une longueur BH $= p$, puis sur BA un point I tel que la distance IK au côté BC soit égale à p : le premier point, H, correspond à GD $= 0$; le second, I, à GF $= 0$. Le triangle IBH est tel que sa hauteur IK est égale à la base BH, et tous les triangles obtenus en le coupant par une parallèle au côté BC jouiront de la même propriété.

Cela posé, si F est un point quelconque du lieu, on a pour hypothèse

$$(1) \qquad GD + GF = p.$$

L désignant le point où IK rencontre GF, on a aussi

$$(2) \qquad LK + IL = p.$$

Or, dans les égalités (1) et (2), GD = LK comme parallèles comprises entre parallèles, par suite GF = IL, et le triangle IGF ayant sa hauteur égale à la base coïncide avec le triangle obtenu en coupant le triangle IBH par la parallèle à BC menée du point G. Tout point du lieu est donc sur IH, et le même raisonnement montre que, réciproquement, tout point de IH est un point du lieu, lequel n'est autre que le segment de droite IH.

Conclusion. — Après avoir déterminé H et I comme il a été dit, on tracera la droite IH, et son intersection avec AC donnera le point F.

Remarque I. — Pour que le problème soit possible, il ne suffit pas que les droites IH et AC se coupent, mais encore que le point d'intersection soit sur les segments IH et AC. Il est facile de voir, par des raisonnements analogues au précédent, qu'un point d'intersection en dehors de ces limites ne pourrait s'interpréter qu'en attribuant des signes aux côtés des rectangles, et par suite en modifiant complètement l'énoncé. Par exemple, si le point de rencontre était en dessous de BC, la perpendiculaire DG changerait de signe en même temps que de sens, et si l'on convient d'appeler cette perpendiculaire la hauteur du rectangle, lequel serait exinscrit du triangle, le point F répondrait à cet énoncé :

Étant donné un triangle ABC, construire un rectangle ayant deux sommets sur le côté BC et un sur chacun des

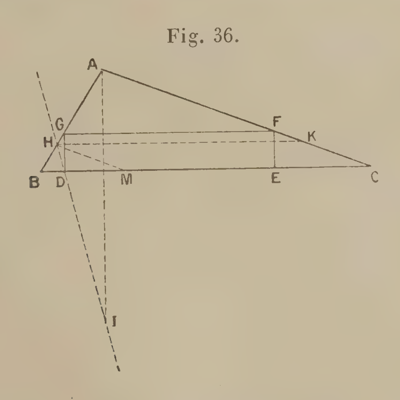
autres côtés prolongés au delà de BC, tel que l'excès de la base sur la hauteur ait une valeur donnée p.

Si F était au-dessus de A, c'est la base GF que l'on devrait considérer comme négative, et l'on serait conduit à un énoncé analogue, l'excès de la hauteur sur la base devant avoir une valeur p.

Remarque II. — On aurait pu tout aussi bien commencer par déterminer un des deux sommets situés sur le côté BC, par exemple le sommet D (*fig.* 36), comme intersection du côté BC avec le lieu obtenu en menant, par un point variable G pris sur BA, une droite GF parallèle à BC et limitée à AC, puis une seconde droite GD perpendiculaire à BC, et de longueur telle que l'on ait $GF + GD = p$.

Ce lieu est encore une droite. Construisons en effet les points remarquables : 1° H correspondant à $GD = 0$ et, pour

Fig. 36.



cela, prenons sur CB une longueur $CM = p$, puis par M menons MH parallèle à CA;

2° I correspondant à $GF = 0$, et pour cela sur la hauteur issue de A, prenons $AI = p$. Le lieu est le segment de droite HI.

Soit en effet D un point quelconque de ce segment : il

suffit de prouver que $GD + GF = p$; or la similitude des triangles HGD, HAI donne

$$\frac{GD}{AI} = \frac{HG}{HA} \quad \text{ou} \quad \frac{GD}{p} = \frac{HG}{HA}.$$

HK étant la parallèle à BC menée par H et limitée à BC, égale à p, on a de même, par les triangles AGF, AHK,

$$\frac{GF}{p} = \frac{GA}{HA}.$$

Ajoutant membre à membre ces égalités,

$$\frac{GD + GF}{p} = \frac{HG + GA}{HA} = 1,$$

d'où

$$GD + GF = p.$$

La réciproque se démontrerait aisément.

DEUXIÈME EXEMPLE.

96. *Construire une circonférence de rayon* R *tangente à une droite et à une circonférence données.*

(A) Il suffit de déterminer le centre ω de la circonférence cherchée.

Or trois conditions sont données, d'où trois lieux distincts devant contenir le centre ω, suivant celle de ces trois conditions que l'on néglige.

Premier lieu. — Négligeons d'abord la troisième condition, nous avons à chercher le lieu des points qui sont à une distance donnée R d'une droite donnée que nous appellerons Δ. Ce lieu se compose de deux droites δ et δ' parallèles à Δ.

Deuxième lieu. — Négligeant au contraire la deuxième

condition, nous devons chercher le lieu des centres des circonférences de rayon R tangentes à la circonférence donnée. Il se compose de deux circonférences qui lui sont concentriques et qui ont pour rayons la somme et la différence des deux rayons donnés.

Troisième lieu. — Négligeant enfin la première condition, c'est-à-dire le rayon R, le centre est assujetti à être également distant de la droite Δ et de la circonférence donnée, que nous désignerons par la même lettre O que son centre, la distance à la circonférence devant être ici mesurée soit par la plus petite, soit par la plus grande normale, suivant le genre du contact des deux circonférences, lesquelles peuvent être extérieures l'une à l'autre, ou l'une enveloppant l'autre.

Ce lieu se compose, dans tous les cas, de deux paraboles ayant pour foyer commun le centre O et pour directrices des parallèles à la droite Δ et qui en sont à une distance égale au rayon r de la circonférence donnée.

Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que la droite Δ est extérieure à la circonférence ou la coupe.

Premier cas. — Supposons la droite Δ extérieure à la circonférence donnée (*fig.* 37). Toute circonférence répondant à la question ne peut occuper que deux positions par rapport à la circonférence O : elle peut lui être extérieure ou l'envelopper.

Soit d'abord ω le centre d'une circonférence tangente à la droite Δ en B, et touchant extérieurement la circonférence O en A. On a

$$\omega A = \omega B$$

ou

$$\omega O - r = \omega B$$

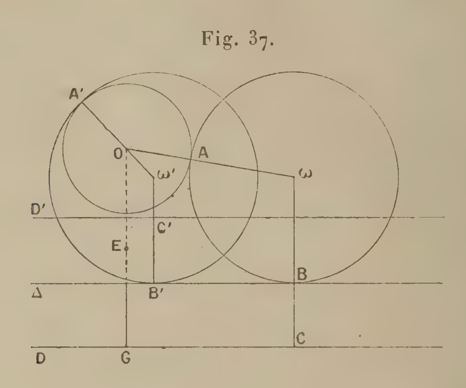
et, par suite,

$$\omega O = \omega B + r.$$

Donc, si l'on prend sur ωB une longueur $BC = r$, puis que

par C on mène une parallèle CD à Δ, cette droite CD a une position fixe, indépendante de la position de ω et l'égalité précédente, équivalente à $\omega O = \omega C$ montre que la propriété caractéristique de tout point du lieu est d'être également distant d'un point fixe O et d'une droite fixe D; ce lieu est

Fig. 37.



donc une parabole ayant pour foyer O et pour directrice D. Elle enveloppe complètement la circonférence O et ne rencontre pas la droite Δ, car le point E de la courbe le plus voisin à la fois du foyer F et de la directrice D est le sommet E, situé au milieu de la perpendiculaire OG abaissée du foyer sur la directrice. Or on a

$$OG > 2r,$$

donc

$$OE = EG > r.$$

Soit maintenant ω' le centre d'une circonférence enveloppant la circonférence O en la touchant au point A', et tangente en B' à la droite Δ. On a encore $\omega' A' = \omega' B'$, ou bien, en se servant encore du point fixe O pour évaluer la distance $\omega' A'$,

$$\omega' O + r = \omega' B', \qquad \text{d'où} \qquad \omega' O = \omega' B' - r = \omega' C'.$$

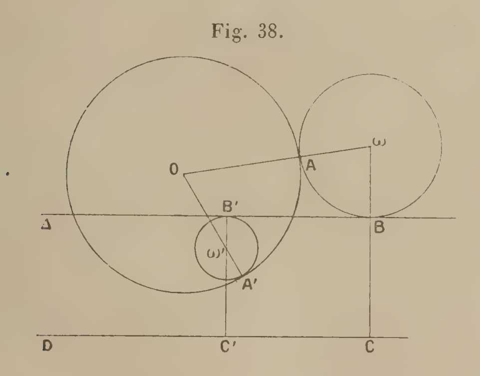
le point C′ étant obtenu en prenant à partir de B′, mais vers O, une longueur $B'C' = r$.

Si l'on mène par C′ une parallèle C′D′ à Δ, on voit que le lieu est une seconde parabole ayant encore pour foyer O et pour directrice la droite D′, parallèle à Δ, menée à une distance r, mais entre cette droite et le centre O. Cette parabole peut couper la circonférence O, quand la distance du point O à Δ est inférieure à trois fois le rayon r; mais ici les points intérieurs à la circonférence O peuvent convenir, les circonférences étant tangentes intérieurement.

Deuxième cas. — Si la droite Δ coupe la circonférence O (*fig.* 38), il peut se présenter quatre dispositions pour une circonférence répondant à la question.

1° Elle peut être extérieure à la circonférence O, les deux centres O et ω étant d'un même côté de la droite Δ. Alors l'égalité $\omega A = \omega B$ équivalente à $\omega O - r = \omega B$ conduit à

Fig. 38.



$\omega O = \omega B + r = \omega C$. Le lieu fait partie d'une parabole ayant pour foyer O et pour directrice une parallèle D à Δ, située à une distance r, mais plus éloignée de O que Δ. Cette parabole passe par les points M, N communs à la circonférence O et à la droite Δ. Le lieu se compose de toute

la partie de cette parabole extérieure à la circonférence O.

2° La circonférence peut être intérieure à O, mais en dessous de Δ. Soit ω' le centre. Alors l'égalité $\omega'A' = \omega'B'$ équivaut à $r - \omega'O = \omega'B'$,

$$\omega'O = r - \omega'B' = B'C' - \omega'B' = \omega'C'.$$

Le lieu est alors la partie de la parabole précédente intérieure au cercle O.

On verrait de même que le lieu des centres des circonférences tangentes à Δ et à la circonférence O, extérieures à O, mais situées au-dessous de Δ, ou bien intérieures à O, mais situées au-dessus de Δ, est constitué par toute la parabole ayant pour foyer O et pour directrice la deuxième parallèle à Δ, menée à une distance r de celle-ci. Dans les deux cas nous retrouvons les deux paraboles énoncées.

(B) Combinant maintenant deux à deux les trois lieux géométriques ainsi obtenus, il en résulte trois méthodes pour la résolution du problème proposé.

Première méthode. — Si l'on considère les deux premiers lieux, le centre est l'un des points communs aux deux parallèles à Δ qui constituent le lieu des points situés à une distance R de Δ avec le système des deux circonférences concentriques à la circonférence donnée, ayant pour rayons la somme et la différence des deux rayons donnés.

Ces deux lieux peuvent se décrire avec la règle et le compas, et leurs points communs s'obtiennent immédiatement.

Deuxième méthode. — Combinons le premier lieu avec le troisième, nous sommes conduit à chercher les points d'intersection de deux paraboles homofocales avec un système de deux droites perpendiculaires à l'axe.

On ne doit pas tracer les paraboles, ce tracé ne pouvant se faire que par points; il faudra donc un certain nombre de

constructions auxiliaires connues, n'exigeant que la règle et le compas, pour achever la solution. Nous y reviendrons dans une remarque finale.

Troisième méthode. — La combinaison des deux derniers lieux conduit à chercher les points d'intersection de deux paraboles homofocales avec deux circonférences. Dans le cas général, cette construction ne peut pas se faire en n'employant que la règle et le compas; au contraire, dans le cas particulier qui nous occupe, les constructions peuvent être effectuées graphiquement, parce que les deux circonférences ont pour centre le foyer commun.

Remarque. — Quoique les trois méthodes diffèrent essentiellement entre elles par les considérations théoriques, elles conduisent exactement aux mêmes conditions graphiques. Pour la seconde méthode, il faut chercher les points d'intersection des deux droites δ, δ' parallèles à Δ, menées à une distance R de celle-ci, avec les paraboles ayant pour foyer O et pour directrices les parallèles à Δ menées à la distance r. Chaque point d'intersection est donc à une distance de la directrice correspondante, et par suite du foyer O, égale à la somme ou à la différence des deux rayons donnés R et r; par suite, il est sur l'une des circonférences décrite de O comme centre avec un rayon égal à la somme ou à la différence des deux rayons donnés : ce sont les circonférences employées dans la première méthode.

Pour la troisième méthode : par les considérations du cours relatives à la construction par points de la parabole en la coupant par des circonférences ayant pour centre le foyer, on est conduit à mener des parallèles aux directrices, du même côté que le foyer, à des distances de chaque directrice égales aux rayons des circonférences comprises dans le deuxième lieu, et à prendre les points communs à ces droites et aux deux

circonférences; or ces parallèles ne sont autres que les droites δ et δ' constituant le premier lieu.

La remarque que nous faisons pour ce problème particulier se trouve fréquemment vérifiée : lorsque des considérations théoriques diverses conduisent à des méthodes différentes pour la solution d'un même problème graphique, il arrive souvent que ces méthodes ramènent finalement aux mêmes constructions, mais dans un ordre différent.

COMBINAISON DE LA MÉTHODE DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES AVEC LES AUTRES MÉTHODES CONNUES.

97. Cette méthode directe, consistant à déterminer immédiatement des points importants de la figure demandée, n'est pas toujours d'une application facile; on doit alors recourir aux autres méthodes que l'on trouvera exposées dans les *Questions de Géométrie* de M. Desboves, sous les titres de Méthode des substitutions successives, Méthode des figures semblables, Méthode de renversement.

Dans ce cas, les points à déterminer appartiennent à une figure auxiliaire, présentant, avec la figure à construire, des relations simples, et telles que, ces points étant construits, on puisse en déduire facilement la figure demandée. La figure auxiliaire, n'étant pas indiquée directement dans l'énoncé, peut être choisie par des considérations très diverses. Le choix est d'une grande importance pour la simplicité de la solution. Une seule considération générale peut servir de guide dans un assez grand nombre de cas : Lorsque dans l'énoncé figure une fonction de certaines dimensions de la figure demandée, fonction susceptible d'une représentation géométrique simple, il convient, le problème étant supposé résolu, d'en faire avant tout la construction, en la reliant aux données d'une manière aussi peu compliquée que possible.

TROISIÈME EXEMPLE.

98. *Construire un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé* A, *et la somme* $2m$ *des deux autres côtés.*

Solution directe. — Ayant pris sur une droite indéfinie une longueur $BC = a$, il suffit de déterminer le sommet A opposé.

Or, si l'on ne tient compte que de l'angle donné, l'arc du segment capable de cet angle décrit sur BC comme corde est un premier lieu contenant ce point. Négligeons au contraire cet angle, et ne tenons compte que de la somme donnée, nous en aurons un second, qui est le lieu des points tels que la somme des distances de chacun aux deux points fixes B, C ait une valeur donnée $2m$; c'est une ellipse ayant pour foyers ces deux points, et son grand axe égal à $2m$.

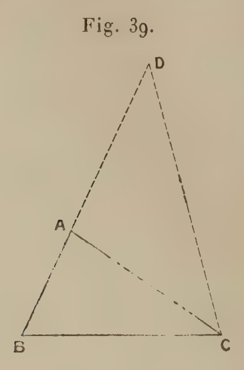
On est donc ramené à trouver l'intersection d'une circonférence avec une ellipse, problème qui ne peut pas se résoudre graphiquement dans le cas général. La méthode indirecte suivante donne la solution dans ce cas particulier, caractérisé par ce fait que la circonférence passe aux deux foyers de l'ellipse : elle revient à chercher les points de cette circonférence également distants de l'un des foyers et du cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer.

Solution indirecte. — Par la combinaison de la méthode des lieux géométriques avec celle des substitutions successives.

Le problème étant supposé résolu, formons la somme donnée $2m$, en prolongeant le côté BA d'une longueur $AD = AC$: on a alors $BD = 2m$. C'est ce point D que nous chercherons à déterminer : il sera facile d'en déduire A, le triangle ADC devant être isoscèle (*fig.* 39).

Or un premier lieu contenant D est la circonférence décrite de B comme centre avec $2m$ pour rayon; un autre est

Fig. 39.



le segment capable de l'angle $\frac{A}{2}$ décrit sur BC comme corde. Nous retombons sur une des solutions connues de ce problème.

QUATRIÈME EXEMPLE.

99. Des considérations analogues s'appliquent lorsque c'est la différence des deux côtés inconnus qui est donnée, au lieu de la somme.

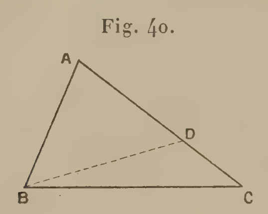
La *solution directe* revient à trouver les points d'intersection d'une hyperbole avec une circonférence passant par les deux foyers.

Solution indirecte. — Supposons le problème résolu. Admettons que AB soit le plus petit des deux côtés inconnus; formons la différence $AC - AB = 2m$, en portant sur AC, de A vers C, une longueur $AD = AB$. On forme un triangle BDC dans lequel on connaît $BC = a$, le côté $CD = 2m$ et l'angle $\widehat{BDC} = 1d + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Dès lors la méthode des lieux géométriques conduit aux constructions suivantes :

Sur une droite indéfinie on prend une longueur $BC = a$; puis sur BC comme corde on décrit un segment capable de l'angle $\left(1\,d + \frac{A}{2}\right)$; enfin de C comme centre, avec un rayon égal à $2m$, on décrit un arc de cercle qui détermine le point D

Fig. 40.



par son intersection avec l'arc du segment. On en déduit aisément le point A par la construction du triangle isoscèle DAB, qui est maintenant déterminé (*fig.* 40).

100. Problèmes analogues. — La construction d'un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés, conduirait de même, comme solution directe, à trouver l'intersection d'une ellipse ou d'une hyperbole avec une droite passant par un des foyers; et, comme solution indirecte, à construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris.

CINQUIÈME EXEMPLE.

101. *Construire un triangle connaissant le périmètre* $2p$ *et les angles.*

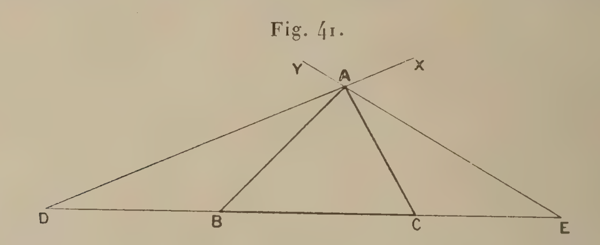
Il ne se présente ici aucune méthode directe et simple, basée sur les lieux géométriques, pour déterminer les som-

mets, parce que les trois sommets jouent le même rôle. Si nous choisissions l'un, nous ne pourrions pas trouver de solution donnant un des sommets inconnus sans l'autre.

Pour une méthode indirecte, on peut obtenir une représentation simple du périmètre donné de deux manières.

1° Le problème étant supposé résolu, il suffit de rabattre les côtés BA et CA de part et d'autre de BC, en BD et CE (*fig.* 41). Alors, dans le triangle ADE, on connaît le

Fig. 41.



côté $DE = 2p$ et les angles adjacents $\widehat{D} = \frac{\widehat{B}}{2}$, $\widehat{E} = \frac{\widehat{C}}{2}$, d'où la construction suivante :

Sur une droite indéfinie on prend une longueur $DE = 2p$; puis on construit les droites DX et CY faisant avec DE les angles $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$; ce sont deux lieux géométriques contenant le sommet A qui, dès lors, est leur point commun. Il ne reste plus ensuite qu'à construire les triangles isoscèles ABD, ACE.

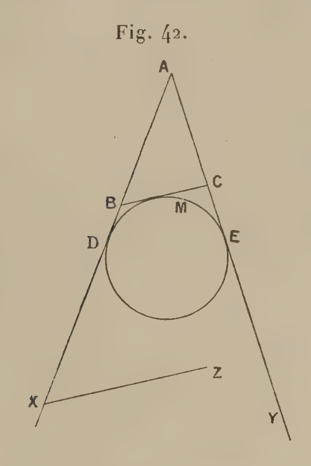
102. 2° On obtient encore une représentation géométrique simple du demi-périmètre par la considération de l'un des cercles exinscrits. Cette méthode ramène non plus aux lieux géométriques, mais à une méthode très générale aussi, mais d'un usage fort restreint en Géométrie élémentaire, ainsi que nous l'avons signalé (9), reposant sur l'emploi des courbes enveloppes.

Construisons un angle XAY égal à l'angle donné A (*fig.* 42);

puis sur les côtés prenons des longueurs AD, AE égales au demi-périmètre p et construisons la circonférence tangente aux côtés de l'angle en D et E. On sait que tous les triangles, tels que ABC, obtenus en menant à cette circonférence une tangente située entre le sommet A et la circonférence ont le même périmètre égal à 2AD ou $2p$, et réciproquement.

Dès lors, si l'on considère tous les triangles ayant pour

Fig. 42.



angle au sommet XAY et pour périmètre $2p$, l'arc DME de cette circonférence est l'*enveloppe* de toutes les positions du troisième côté. Il suffit donc de mener à cet arc une tangente faisant avec AX un angle égal au deuxième angle donné B. Pour cela, par un point quelconque X de AX, on mène une droite XZ faisant avec XA un angle égal à B, et l'on n'a plus qu'à mener à l'arc DME une tangente parallèle à XZ.

103. Les mêmes considérations conduisent à la solution du problème suivant :

Construire un triangle connaissant un angle A, *la hauteur correspondante* h *et le périmètre* $2p$.

Par la méthode des lieux géométriques, on prendra sur une droite indéfinie une longueur $DE = 2p$; puis sur DE comme corde on décrira un segment capable de l'angle $\left(1\,d + \frac{A}{2}\right)$; on mènera ensuite une parallèle à DE, à une distance égale à h : les points d'intersection de cette parallèle avec l'arc du segment sont les positions de A. On en déduit aisément le triangle ABC par la construction des triangles isoscèles ABD, ACE.

Par les enveloppes, on construira d'abord un angle XAY égal à l'angle donné; puis, prenant sur ses côtés des longueurs AD, AE égales au demi-périmètre p, on construira le cercle exinscrit, dont l'arc DME est l'enveloppe de toutes les droites répondant aux deux conditions d'angle et de périmètre. Décrivant enfin de A comme centre, avec un rayon égal à h, une circonférence, nous aurons l'enveloppe de toutes les droites répondant à la condition de hauteur. Donc la base BC du triangle cherché s'obtiendra en menant une tangente commune intérieure à ces deux circonférences.

SIXIÈME EXEMPLE.

Lieux géométriques et substitutions successives.

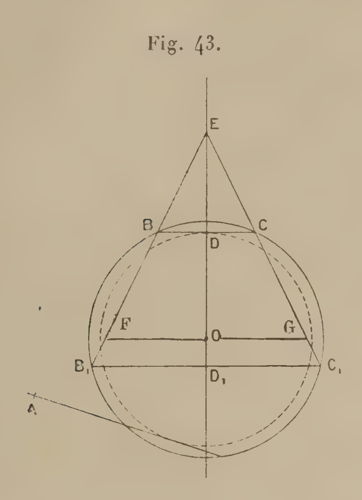
104. *Par un point pris dans le plan d'un cercle mener une sécante telle que la somme de la corde interceptée et de sa distance au centre ait une longueur donnée l.*

Nous chercherons à déterminer le milieu de la corde. Un premier lieu contenant ce point est la circonférence ayant pour diamètre la droite AO qui joint le point donné A au centre de la circonférence.

Pour en avoir un second, nous déterminerons d'abord la longueur de cette corde; après quoi il suffira de considérer

le lieu des milieux de toutes les cordes ayant cette longueur, lequel est la circonférence ayant le point O pour centre, et pour rayon la distance OD de ce point à l'une quelconque des cordes ayant la longueur trouvée (*fig.* 43).

Fig. 43.



Supposons que BC représente l'une des cordes ayant cette longueur. Formons la somme donnée l, en abaissant de O la perpendiculaire OD sur BC, et la prolongeant d'une longueur DE égale à la corde BC. Alors $OE = l$. Joignons ce point E aux extrémités B, C de la corde. Dans le triangle isoscèle obtenu EBC, la hauteur est égale à la base et il en est de même dans tous les triangles semblables, formés en menant des parallèles à la base BC jusqu'à ce qu'elles rencontrent les deux côtés EB, EC.

D'où la construction suivante :

Par le centre on mène une droite OX sur laquelle on porte une longueur $OE = l$; puis, par un point arbitraire de OX (sur la figure nous avons choisi le centre lui-même), on mène une droite FG perpendiculaire à OX, sur laquelle on

porte de part et d'autre de OX une longueur égale à la moitié de la distance de cette perpendiculaire au point E. Joignant les points F, G ainsi construits au point E, on a deux droites qui, par leur rencontre avec la circonférence, déterminent les extrémités B, B_1 et C, C_1 des cordes répondant à la question, et par suite déterminent aussi les rayons OD, OD_1 des circonférences contenant les milieux des cordes répondant à l'énoncé.

Remarque I. — Il importe d'observer que, par la manière dont les constructions ont été faites, nous avons supposé le point D du même côté que E par rapport au centre. Donc, si l'une des cordes, ainsi qu'il arrive ici pour B_1C_1, n'est pas du même côté que E, elle ne répond pas à la question ; c'est la différence $B_1C_1 - OD_1$, qui est égale à l.

Pour que les deux cordes BC, B_1C_1 répondent à la question dans tous les cas, il faut attribuer un signe à la perpendiculaire qui mesure la distance du centre à la corde et considérer la somme algébrique, et non la somme des valeurs absolues de la corde et de la distance au centre.

Remarque II. — La solution précédente peut rentrer encore dans la méthode générale des enveloppes, car les circonférences auxiliaires ayant pour rayons OD et OD_1 sont les enveloppes de toutes les cordes telles que la somme de la longueur de chacune et de sa distance au centre soit égale à l. Ces circonférences étant construites, il suffit de mener par A des tangentes à ces enveloppes, ce qui ramène finalement aux constructions précédentes.

SEPTIÈME EXEMPLE.

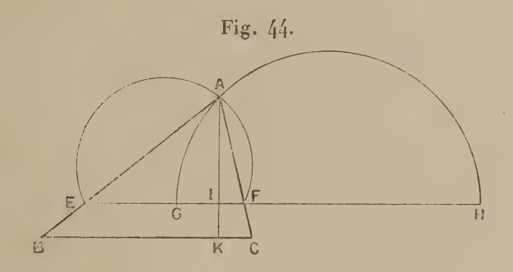
Combinaison de la méthode des lieux géométriques avec celle des figures semblables.

105. *Construire un triangle connaissant un angle, la hauteur correspondante et le rapport* $\frac{m}{n}$ *des deux côtés qui comprennent cet angle.*

Tous les triangles admettant l'angle donné A, et tels que les côtés qui comprennent cet angle soient dans un rapport donné, sont semblables entre eux. Nous construirons donc un de ces triangles, puis nous en déduirons le triangle demandé en tenant compte de la hauteur.

Nous choisirons arbitrairement la base EF du triangle auxiliaire. Le sommet opposé A de ce triangle AEF (*fig.* 44)

Fig. 44.



appartient premièrement à l'arc du segment capable de l'angle donné décrit sur EF comme corde, deuxièmement à la circonférence qui a pour diamètre le segment GH de la droite indéfinie EF compris entre les deux points conjugués qui divisent EF dans le rapport donné $\frac{m}{n}$.

Le triangle demandé se déduit de AEF en menant la hauteur AI de ce dernier, sur laquelle on prend une longueur AK

egale à la hauteur donnée, puis traçant par K une parallèle à EF, jusqu'à ce qu'elle rencontre les directions AE, AF.

106. Remarque. — Cette méthode se trouve parfois indiquée assez nettement *a priori*, soit par des conditions de similitude contenues dans l'énoncé, soit par des égalités de rapports comme dans l'exemple précédent, soit encore par des égalités de produits pouvant conduire à des proportions.

C'est une condition de similitude qui se trouve implicitement comprise dans l'énoncé de ce problème connu :

Construire un triangle, connaissant les angles et la surface, puisque tous les triangles admettant les angles donnés sont semblables entre eux.

Au contraire, des égalités de produits d'où l'on déduit des proportions résultent de l'énoncé suivant :

Construire un triangle, connaissant les trois hauteurs.

En effet, la considération des hauteurs α, β, γ conduit naturellement à celle de l'aire du triangle, d'où les deux égalités de produits $a\alpha = b\beta = c\gamma$ pouvant conduire à des proportions qui ramènent elles-mêmes à la solution connue, par la construction d'un triangle auxiliaire semblable au triangle demandé.

HUITIÈME EXEMPLE.

Lieux géométriques, avec méthodes de renversement et de substitutions successives.

107. *Mener une tangente à un cercle, de manière qu'elle forme avec les deux côtés d'un angle* YOX (*fig.* 45) *un triangle d'aire* m^2.

Soit BC cette tangente, elle détermine un triangle BOC dont la hauteur est le rayon R de la circonférence. L'expres-

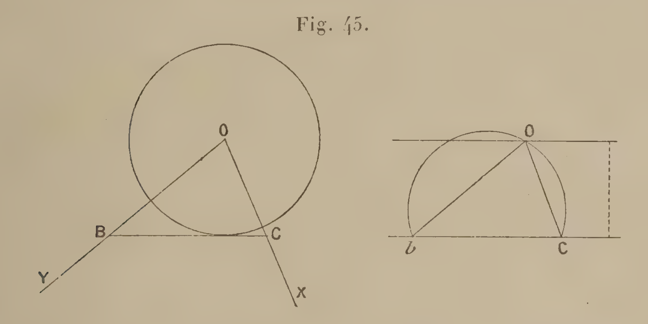
sion de l'aire du triangle conduit donc à l'égalité

$$BC \frac{R}{2} = m^2, \qquad \text{d'où} \qquad BC = \frac{m^2}{\left(\frac{R}{2}\right)}.$$

La longueur BC peut donc être construite comme troisième proportionnelle à $\frac{R}{2}$ et m, et l'on est ramené à construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la hauteur correspondante.

On trace à part une droite sur laquelle on prend une lon-

Fig. 45.



gueur $bc = BC$. Sur bc, comme corde, on décrit un segment capable de l'angle YOX; son arc est un premier lieu géométrique contenant le sommet du triangle ayant bc pour base et répondant au dernier énoncé; puis, on mène une parallèle à bc, à une distance égale à R : c'est un deuxième lieu devant contenir le sommet o, lequel est à l'intersection des deux lieux. Le triangle boc étant ainsi construit, il suffit de porter sur les côtés OY, OX de l'angle donné les longueurs $OB = ob$, $OC = oc$ et de joindre B et C par une droite.

Quand le problème est possible, il admet deux solutions, car on peut porter la longueur ob sur OX aussi bien que sur OY.

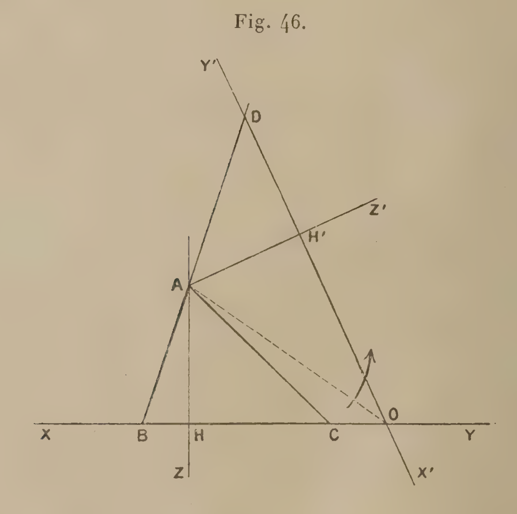
NEUVIÈME EXEMPLE.

Lieux géométriques, substitutions successives et renversement.

108. *Construire un triangle, connaissant un angle* A, *la hauteur* h *correspondante et la somme* $b + c = m$ *des deux côtés comprenant l'angle* A.

Sur une droite arbitraire AZ (*fig.* 46), on prend une longueur $AH = h$, puis on lui mène une perpendiculaire XY; c'est la direction de la base BC du triangle demandé, A étant

Fig. 46.



pris pour sommet, et AZ pour direction de la hauteur.

Supposons connus les sommets B, C sur cette droite, et formons la somme donnée m, en prolongeant le côté BA d'une longueur $AD = AC$. Il suffira de savoir placer cette droite BD,

de longueur connue m, dans une position convenable pour avoir les longueurs AB et AC des deux côtés, et achever aisément la construction du triangle.

Considérons le lieu des points tels que D, obtenus en ne tenant pas compte du sommet B, mais seulement des deux conditions $AD = AC$ et $\widehat{CAD} = 2d - A$.

Si nous ramenions la direction AD sur AC, par une rotation autour de A, le point D coïnciderait avec C : donc le lieu décrit par le point D ne serait autre que la droite XY elle-même; faisons tourner ce lieu de l'angle $(2d - A)$ dans le sens de la flèche, nous aurons le lieu demandé, qui est une droite $X'Y'$. On la construira en faisant un angle

$$\widehat{ZAZ'} = 2d - A,$$

prenant $AH' = AH$, puis menant par H' une perpendiculaire à AZ'.

Cela posé, les deux droites XY et $X'Y'$ forment un angle XOY' égal à A, dont la bissectrice passe en A, puisque ce point est également distant des deux côtés. On est donc ramené au problème de Pappus généralisé.

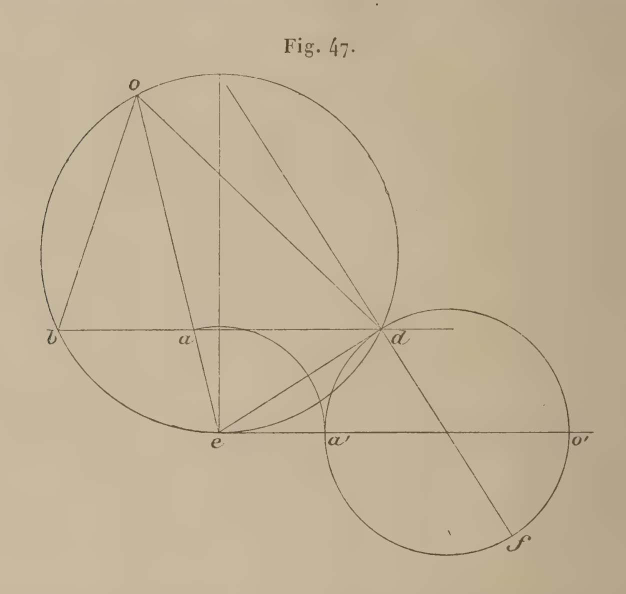
Par un point A pris sur la bissectrice d'un angle XOY' mener une droite telle que la portion BD comprise entre les côtés de l'angle ait une longueur connue.

La série des constructions à effectuer est donc la suivante : Ayant pris sur une droite arbitraire AZ une longueur $AH = h$, et mené par H une perpendiculaire indéfinie XY, on mène AZ' faisant avec AZ un angle égal à $2d - A$, sur laquelle on prend $AH' = AH$, puis par H' on mène $X'Y'$ perpendiculaire à AZ'.

Procédant alors par renversement, on construit un triangle *obd* égal au triangle OBD, dans lequel on connaît un côté $BD = m$ l'angle opposé $\widehat{XOY'} = \widehat{A}$, et la longueur OA de la bissectrice de cet angle.

Ayant pris sur une droite indéfinie une longueur $bd = m$, sur bd comme corde on décrit un segment capable de l'angle $\widehat{A}$: on a ainsi la circonférence circonscrite au triangle cherché obd. La bissectrice de l'angle au sommet o passe par le milieu e de

Fig. 47.



l'arc opposé à celui qui limite le segment. Si a désigne le pied de cette bissectrice, on sait que l'on a

$$ea \times eo = \overline{ed}^2.$$

Il est d'ailleurs évident sur la figure que $eo - ea = oa = \text{OA}$, longueur mesurée sur la première figure. On peut donc construire les deux longueurs eo, ea, dont on connaît la différence et le produit. Elles sont construites en eo', ea' au moyen de la circonférence ayant pour diamètre $df = \text{AO}$. La circonférence décrite alors de e comme centre, avec ea' pour rayon (*fig.* 47), détermine le point a par son intersection bd.

Traçant ensuite la droite ea, qui donne le point o sur l'arc du premier segment, puis ob, il ne reste plus qu'à porter sur OX une longueur $OB = ob$ pour avoir la position du sommet B dans le triangle demandé, que l'on achève en faisant un angle

$$\widehat{BOC} = \widehat{A}$$

dans le sens convenable.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III.

Lieux géométriques connus ou évidents par l'application des méthodes précédentes.

CHAPITRE IV.

Application des méthodes générales à la recherche des lieux géométriques.

CHAPITRE V.

Application des lieux géométriques à la résolution des problèmes graphiques.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

18937 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

